Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie klas 4 en lager

vrijdag 11 september 2020
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Daan verdeelt de getallen 1 tot en met 9 over de negen vakjes van een 3×3-tabel (in elk vakje komt precies één getal). Vervolgens omcirkelt Daan in elke rij het middelste getal wat grootte betreft. Als bijvoorbeeld de getallen 8, 1 en 2 in een rij staan, dan omcirkelt hij dus het getal 2. Hij doet dat ook in elke kolom en op elk van de twee diagonalen. Als hij een getal al omcirkeld heeft, dan omcirkelt hij dat getal niet opnieuw.

8	1	2
7	6	3
9	5	4

Het resultaat van dit proces noemt hij een *mediaantabel*. Hierboven zie je een voorbeeld van een mediaantabel waarin 5 getallen zijn omcirkeld.

(a) Wat is het **kleinst** mogelijke aantal omcirkelde getallen in een mediaantabel?
Bewijs dat het niet minder kan zijn en geef een voorbeeld waarin dit minimale aantal omcirkeld wordt.

(b) Wat is het **grootst** mogelijke aantal omcirkelde getallen in een mediaantabel?
Bewijs dat het niet meer kan zijn en geef een voorbeeld waarin dit maximale aantal omcirkeld wordt.

2. We bekijken getallenrijen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die voldoen aan de formule $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_1}{a_n + 1}$ voor alle $n \geqslant 1$.

(a) Stel dat $a_1 = -3$. Bereken a_{2020}.

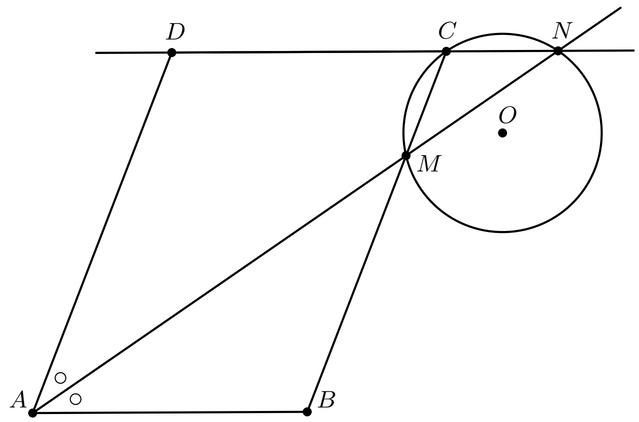
(b) Stel dat $a_1 = 2$. Bewijs dat voor alle $n \geqslant 2$ geldt dat $\frac{4}{3} \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}$.

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

3. Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $\angle A < 90°$ en $|AB| < |BC|$. De bissectrice van hoek A snijdt zijde BC in M en het verlengde van zijde DC in N. Punt O is het middelpunt van de cirkel door M, C en N.

(a) Bewijs dat driehoeken OCM en OCN congruent zijn.

(b) Bewijs dat $\angle OBC = \angle ODC$.



4. Bepaal alle tweetallen gehele getallen (x, y) waarvoor er een priemgetal p en een geheel getal a bestaan zo dat $x^2 + y^2 = p$ en $(x + y)^2 - a^2 = p$.

5. Sabine heeft een heel grote schelpenverzameling. Ze besluit een deel van haar schelpen aan haar zusje te geven. De eerste dag legt ze al haar schelpen op een lange rij en geeft vervolgens elke schelp die op een kwadraatpositie in de rij ligt (dus de eerste, de vierde, de negende, de zestiende, enzovoorts) aan haar zusje. De tweede dag maakt ze van de overgebleven schelpen weer zo'n lange rij en opnieuw geeft ze elke schelp die op een kwadraatpositie ligt aan haar zusje. Ze herhaalt dit proces elke dag.

Het blijkt dat ze op de 27ste dag voor het eerst minder dan 1000 schelpen overhoudt en dat het op de 28ste dag voor de tiende keer gebeurt dat het aantal schelpen dat ze overhoudt precies een kwadraat is.
Wat zijn de mogelijke aantallen schelpen waarmee Sabine begonnen kan zijn?