Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie klas 6

vrijdag 13 september 2019
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Een *volledig getal* is een getal van 9 cijfers dat de cijfers 1 tot en met 9 allemaal precies één keer bevat. Verder is het *verschilgetal* van een getal N het getal dat je krijgt als je in N steeds het verschil van twee cijfers naast elkaar neemt en al die verschillen weer aan elkaar plakt. Zo is het verschilgetal van 25143 gelijk aan 3431. Het volledige getal 124356879 heeft als extra eigenschap dat het verschilgetal 12121212 afwisselend uit de cijfers 1 en 2 bestaat.
Bepaal alle a met $3 \leqslant a \leqslant 9$ waarvoor er een volledig getal N bestaat met de extra eigenschap dat het verschilgetal van N afwisselend uit de cijfers 1 en a bestaat.

2. Op een feestje zijn n gasten aanwezig. Voor elk tweetal gasten geldt dat ze óf met elkaar bevriend zijn, óf niet met elkaar bevriend zijn. Iedere gast is bevriend met precies vier andere gasten. Als een gast met twee andere gasten allebei *niet* bevriend is, is het altijd zo dat die gasten ook niet met elkaar bevriend zijn.
Wat zijn de mogelijke waarden van n?

3. Op een cirkel met middelpunt M liggen punten A, B en C. Het spiegelbeeld van M in de lijn AB ligt binnen driehoek ABC en is het snijpunt van de bissectrices van hoek A en hoek B. (De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke hoeken deelt.) De lijn AM snijdt de cirkel nogmaals in punt D.
Bewijs dat $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AM|$.

4. De rij van Fibonaccigetallen $F_0, F_1, F_2, \ldots$ wordt gedefinieerd door $F_0 = F_1 = 1$ en $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor alle $n \geqslant 0$. Zo hebben we dus bijvoorbeeld

$$F_2 = F_0 + F_1 = 2, \quad F_3 = F_1 + F_2 = 3, \quad F_4 = F_2 + F_3 = 5 \quad \text{en} \quad F_5 = F_3 + F_4 = 8.$$

De getallenrij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wordt gedefinieerd door

$$a_n = \frac{1}{F_n F_{n+2}} \quad \text{voor alle } n \geqslant 0.$$

Bewijs dat voor alle $m \geqslant 0$ geldt:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m < 1.$$

5. **Zie achterkant voor opgave 5.**

5. Thomas en Nils spelen een spelletje. Ze hebben een aantal kaarten, genummerd 1, 2, 3, enzovoort. In het begin liggen alle kaarten open op tafel. Ze zijn om en om aan de beurt. Degene die aan de beurt is, kiest een kaart die nog op tafel ligt en besluit om deze zelf te houden of aan de ander te geven. Als alle kaarten op zijn, dan tellen ze elk de getallen van hun eigen kaarten bij elkaar op. Als het verschil tussen deze twee uitkomsten deelbaar is door 3, dan wint Thomas. Zo niet, dan wint Nils.

(a) Stel dat ze spelen met 2018 kaarten (genummerd van 1 tot en met 2018) en dat Thomas begint. Bewijs dat Nils zo kan spelen dat hij met zekerheid het spel wint.

(b) Stel dat ze spelen met 2020 kaarten (genummerd van 1 tot en met 2020) en dat Nils begint. Wie van Nils en Thomas kan nu zo spelen dat hij met zekerheid wint?