Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 14 september 2018

Uitwerkingen

1. Versie voor klas 4 en lager

Om te beginnen merken we op dat een husselgetal alleen de cijfers 2, 4, 6 en 8 kan bevatten. Immers, als we de cijfers in een willekeurige volgorde zetten, dan krijgen we een *even* getal (want deelbaar door 12) vanwege eigenschap (3). Omdat het laatste cijfer van een even getal altijd even is moet dat cijfer gelijk zijn aan 2, 4, 6 of 8 omdat 0 niet meedoet vanwege eigenschap (1). Omdat we elk cijfer achteraan kunnen zetten, geldt dit voor elk cijfer van een husselgetal.

Vervolgens merken we op dat een husselgetal alleen de cijfers 4 en 8 kan bevatten. Stel immers dat een husselgetal een cijfer 2 zou hebben. Door een geschikte verwisseling van de cijfers krijgen we een getal waarvan het laatste cijfer 2 is. De laatste twee cijfers van dit getal zijn dan 22, 42, 62 of 82. Het getal is dan niet deelbaar door 4 (en dus ook niet deelbaar door 12), in tegenspraak met eigenschap (3). Op dezelfde manier kan een husselgetal geen cijfer 6 hebben omdat een getal dat eindigt op 26, 46, 66 of 86 niet deelbaar is door 4.

Omdat een husselgetal deelbaar is door 3 (want deelbaar door 12), is de som van de cijfers ook deelbaar door 3. Omdat elk cijfer een 4 of een 8 is, hebben we de volgende gevallen:

- 5 vieren en 0 achten. Som van de cijfers: 20
- 4 vieren en 1 acht. Som van de cijfers: **24**
- 3 vieren en 2 achten. Som van de cijfers: 28
- 2 vieren en 3 achten. Som van de cijfers: 32
- 1 vier en 4 achten. Som van de cijfers: **36**
- 0 vieren en 5 achten. Som van de cijfers: 40

De getallen van vijf cijfers die voldoen aan eigenschap (1) en (3) zijn dus precies de getallen die betaan uit 4 vieren en 1 acht, of uit 1 vier en 4 achten. We moeten nu nog nagaan welke van deze acht getallen deelbaar zijn door 11. Dit gaat eenvoudig met het 11-criterium: een getal is deelbaar door 11 als de *alternerende som* van de cijfers deelbaar is door 11. Met alternerende som bedoelen we dat we de cijfers afwisselend met een plus-teken en een min-teken nemen. Voor de acht kandidaten vinden we de volgende alternerende sommen:

84444	$8-4+4-4+4=8$	48888	$4-8+8-8+8=4$
48444	$4-8+4-4+4=0$	84888	$8-4+8-8+8=12$
44844	$4-4+8-4+4=8$	88488	$8-8+4-8+8=4$
44484	$4-4+4-8+4=0$	88848	$8-8+8-4+8=12$
44448	$4-4+4-4+8=8$	88884	$8-8+8-8+4=4$

Er zijn dus precies twee husselgetallen van 5 cijfers, namelijk 48444 en 44484.

1. Versie voor klas 5 & klas 6

Om te beginnen merken we op dat een husselgetal alleen de cijfers 2, 4, 6 en 8 kan bevatten. Immers, als we de cijfers in een willekeurige volgorde zetten, dan krijgen we een *even* getal (want deelbaar door 12) vanwege eigenschap (3). Omdat het laatste cijfer van een even getal altijd even is moet dat cijfer gelijk zijn aan 2, 4, 6 of 8 omdat 0 niet meedoet vanwege eigenschap (1). Omdat we elk cijfer achteraan kunnen zetten, geldt dit voor elk cijfer van een husselgetal.

Vervolgens merken we op dat een husselgetal alleen de cijfers 4 en 8 kan bevatten. Stel immers dat een husselgetal een cijfer 2 zou hebben. Door een geschikte verwisseling van de cijfers krijgen we een getal waarvan het laatste cijfer 2 is. De laatste twee cijfers van dit getal zijn dan 22, 42, 62 of 82. Het getal is dan niet deelbaar door 4 (en dus ook niet deelbaar door 12), in tegenspraak met eigenschap (3). Op dezelfde manier kan een husselgetal geen cijfer 6 hebben omdat een getal dat eindigt op 26, 46, 66 of 86 niet deelbaar is door 4.

Omdat een husselgetal deelbaar is door 3 (want deelbaar door 12), is de som van de cijfers ook deelbaar door 3. Als we k achten hebben en $10 - k$ vieren, dan is de som van de cijfers gelijk aan $8k + 4(10 - k) = 40 + 4k = 36 + 4(k + 1)$. Dit is deelbaar door 3 als $k + 1$ deelbaar is door 3, dus als $k = 2$, $k = 5$ of $k = 8$. We zien dat een husselgetal van tien cijfers moet betaan uit 2 achten en 8 vieren, 5 achten en 5 vieren of uit 8 achten en 2 vieren. Merk op dat deze getallen allemaal voldoen aan eigenschap (1) en (3). We hoeven dus alleen nog te kijken welke van deze getallen deelbaar zijn door 11 (eigenschap (2)).

We gebruiken het 11-criterium: een getal is deelbaar door 11 als de *alternerende som* van de cijfers deelbaar is door 11. Met alternerende som bedoelen we dat we de cijfers afwisselend met een plus-teken en een min-teken nemen. In ons geval zijn alle cijfers gelijk aan 4 of 8, dus de alternerende som moet zelfs deelbaar zijn door $4 \times 11 = 44$. Omdat de alternerende som nooit groter kan zijn dan $8+8+8+8+8-4-4-4-4-4 = 20$ (en nooit kleiner dan -20), moet de alternerende som dus gelijk zijn aan 0. Anders gezegd: de som van de vijf cijfers op de oneven posities moet gelijk zijn aan de som van de vijf cijfers op de even posities. Dit betekent dat het aantal achten op de oneven posities gelijk moet zijn aan het aantal achten op de even posities. We bekijken de drie gevallen die we eerder hadden onderscheiden:

- Stel dat er in totaal 2 achten zijn. De enige eis is nu dat er precies 1 acht op een oneven positie staat en 1 acht op een even positie. Hiervoor zijn dus $5 \times 5 = 25$ mogelijkheden.
- Stel dat er in totaal 5 achten zijn. Omdat we de achten onmogelijk in twee gelijke aantallen kunnen verdelen zijn er in dit geval geen oplossingen.
- Stel dat er in totaal 8 achten zijn. De enige eis is nu dat er precies 4 achten op de oneven posities komen en 4 achten op de even posities. Anders gezegd: 1 oneven positie is een vier en 1 even positie is een vier. Hiervoor zijn opnieuw $5 \times 5 = 25$ mogelijkheden.

We concluderen dat er in totaal $25 + 25 = 50$ tiencijferige husselgetallen zijn.

2. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

We bekijken eerst het geval dat 1 rood is. Dan moeten alle getallen van 1 tot en met 25 rood zijn. Stel immers dat een zeker getal k blauw is. Dan hebben 1 en k verschillende kleur, zodat wegens de derde regel het getal $1 \cdot k = k$ rood moet zijn. Maar dit getal was blauw, dus dat is een tegenspraak. Merk op dat een kleuring waarbij alle getallen rood zijn inderdaad een correcte kleuring is.

Nu bekijken we het geval dat 1 blauw is. Omdat 5 niet blauw is, volgt uit de tweede regel dat 1 en 4 dezelfde kleur hebben. Dus 4 is blauw. Ook volgt dat 2 en 3 dezelfde kleur hebben. Als 2 rood zou zijn, dan zou $3 = 1 + 2$ juist blauw moeten zijn wegens de tweede regel, dus 2 en 3 zijn allebei blauw.

We weten nu dus dat 1, 2, 3 en 4 blauw zijn. Wegens de tweede regel vinden we dan dat ook $6 = 5 + 1$, $7 = 5 + 2$, $8 = 5 + 3$ en $9 = 5 + 4$ blauw zijn. Opnieuw toepassen van de tweede regel geeft achtereenvolgens dat ook $11, 12, 13, 14$ blauw zijn, dat $16, 17, 18, 19$ blauw zijn en dat $21, 22, 23, 24$ blauw zijn.

Wegens de derde regel zijn $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$ en $20 = 4 \cdot 5$ rood. Alleen de kleur van 25 is nog onbepaald. We vinden zo twee mogelijke kleuringen:

(1) Alleen $5, 10, 15, 20, 25$ (de getallen deelbaar door 5) zijn rood.

(2) Alleen $5, 10, 15, 20$ zijn rood.

We controleren dat kleuring (1) inderdaad correct is. Aan de tweede regel is voldaan, want de som van een getal dat deelbaar is door 5 en een getal dat niet deelbaar is door 5 is zelf niet deelbaar door 5. Aan de derde regel is voldaan, want het product van een getal dat deelbaar is door 5 en een getal dat niet deelbaar is door 5 is zelf wel deelbaar door 5.

Kleuring (2) verschilt alleen van kleuring (1) voor het getal 25. Om te controleren dat kleuring (2) correct is, hoeven we dus alleen de regels te controleren in het geval dat een van de betrokken getallen 25 is. We controleren dat 25 niet het product is van een blauw en een rood getal (dat klopt). Ook moeten we controleren dat er geen rood getal k is waarvoor $25 + k$ rood is, of $25k$ blauw is. Dat gaat goed omdat de getallen groter dan 25 niet worden gekleurd.

We concluderen dat er in totaal 3 correcte kleuringen zijn: de kleuring waarin alle getallen rood zijn en de kleuringen (1) en (2).

2. Versie voor klas 6

We bekijken eerst het geval dat 1 rood is. Dan moeten alle getallen van 1 tot en met 15 rood zijn. Stel immers dat een zeker getal k blauw is. Dan hebben 1 en k verschillende kleur, zodat wegens de derde regel het getal $k = 1 \cdot k$ rood moet zijn. Maar dit getal was blauw, dus dat is een tegenspraak. Merk op dat een kleuring waarbij alle getallen rood zijn inderdaad een correcte kleuring is.

Nu bekijken we het geval dat 1 blauw is. Merk op dat als twee getallen samen 15 zijn, dan moeten die getallen dezelfde kleur hebben wegens de tweede regel. De volgende paren hebben dus steeds dezelfde kleur: 1 en 14, 2 en 13, 3 en 12, 4 en 11, 5 en 10, 6 en 9, 7 en 8.

Getal 2 is blauw. Stel immers dat 2 rood is. Uit de tweede regel volgt dan dat $3 = 1 + 2$ blauw is. Herhaald toepassen van de tweede regel geeft dan achtereenvolgens dat $5 = 3 + 2$ blauw is, dat $7 = 5 + 2$ blauw is, en uiteindelijk dat 15 blauw is. Omdat 15 niet blauw is, kan 2 dus niet rood zijn.

Getal 7 is blauw. Stel immers dat 7 rood is. Dan volgt uit de tweede regel dat $8 = 1 + 7$ blauw is. Echter, 7 en 8 moeten dezelfde kleur hebben, dus dat kan niet.

Getal 4 is blauw. Stel immers dat 4 rood is. Dan volgt uit de tweede regel dat $11 = 4 + 7$ blauw is. Maar 4 en 11 hebben dezelfde kleur, dus 4 kan niet rood zijn.

Het paar 3 en 12 en het paar 6 en 9 hebben dezelfde kleur. Immers, anders zou $9 = 3 + 6$ blauw zijn vanwege de tweede regel en ook zou $12 = 3 + 9$ blauw zijn vanwege de tweede regel.

Tot nu toe weten we dus dat 15 rood is, dat $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ blauw zijn, dat $3, 6, 9, 12$ dezelfde kleur hebben en dat $5, 10$ dezelfde kleur hebben. De getallen 3 en 5 kunnen niet allebei rood zijn, want als 3 rood is, dan is $5 = 2 + 3$ blauw vanwege de tweede regel. De drie resterende mogelijkheden voor de kleuren van 3 en 5 geven de volgende kleuringen:

(1) Alleen 15 is rood.

(2) Alleen $5, 10, 15$ (de getallen deelbaar door 5) zijn rood .

(3) Alleen $3, 6, 9, 12, 15$ (de getallen deelbaar door 3) zijn rood.

Het is makkelijk na te gaan dat deze drie kleuringen inderdaad correct zijn. We gaan dit na voor de derde kleuring, de andere twee gaan op dezelfde manier. Dat de som van een rood en een blauw getal altijd blauw is, volgt uit het feit dat de som van een getal dat deelbaar is door 3 en een getal dan niet deelbaar is door 3 zelf ook niet deelbaar is door 3. Dat het product van een blauw en een rood getal altijd rood is volgt uit het feit dat het product van een getal dat deelbaar is door 3 en een getal dat niet deelbaar is door 3 zelf weer deelbaar is door 3.

We concluderen dat er in totaal 4 correcte kleuringen zijn: de kleuring waarin alle getallen rood zijn en de kleuringen (1), (2) en (3).

3. Als we de tweede vergelijking van de eerste aftrekken, dan krijgen we

$$x^2 - z^2 = -x + z - (x - z),$$

wat zich ook wel laat herschrijven tot

$$(x - z)(x + z) = -2(x - z),$$

oftewel

$$(x - z)(x + z + 2) = 0.$$

Omdat x en z verschillend moeten zijn, is $x - z$ ongelijk aan 0 en kunnen we concluderen dat $x + z + 2 = 0$, oftewel $z = -x - 2$. Als we de derde vergelijking van de tweede aftrekken, dan krijgen we

$$y^2 - x^2 = x + 3y - (2x + 2y),$$

wat zich laat herschrijven tot

$$(y - x)(y + x) = 1(y - x),$$

oftewel

$$(y - x)(y + x - 1) = 0.$$

Omdat x en y verschillend moeten zijn, is $y - x$ ongelijk aan 0 en kunnen we concluderen dat $y + x - 1 = 0$, oftewel $y = 1 - x$.

Als we nu $y = 1 - x$ en $z = -x - 2$ invullen in de eerste vergelijking, dan krijgen we

$$x^2 + (1 - x)^2 = -x + 3(1 - x) + (-x - 2),$$

oftewel

$$2x^2 - 2x + 1 = -5x + 1.$$

Dit geeft de kwadratische vergelijking $2x^2 + 3x = 0$, die als oplossingen $x = 0$ en $x = -\frac{3}{2}$ heeft. In beide gevallen kunnen we de waarde van y en z afleiden uit de formules $y = 1 - x$ en $z = -x - 2$. Dit geeft de oplossingen $(x, y, z) = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ en $(x, y, z) = (0, 1, -2)$.

Voor deze oplossingen weten we dus dat de eerste vergelijking geldt. Omdat het verschil tussen de eerste en de tweede vergelijking aan beide kanten nul geeft (omdat we $z = -x - 2$ hadden gekozen), geldt de tweede vergelijking dus ook. Vanwege onze keuze van $y = 1 - x$, volgt nu ook dat de derde vergelijking geldt. De twee oplossingen geven dus echt oplossingen voor alle drie de vergelijkingen.

4. Versie voor klas 4 en lager

(a) Omdat BE de bissectrice is van $\angle ABC$, geldt er dat $\angle ABE = \angle CBF$. Verder hadden we $\angle FCB = \angle EAB$ vanuit de gegevens. Omdat de hoekensom in een driehoek 180° is, zowel in driehoek ABE als in driehoek CBF, moeten de hoeken $\angle BFC$ en $\angle BEA$ ook gelijk zijn. Nu is hoek $\angle BFC$ precies een overstaande hoek van $\angle AFE$. We zien dus dat hoeken $\angle AFE$ en $\angle FEA$ gelijk zijn, wat betekent dat driehoek AEF gelijkbenig is.

(b) Nu gaan we bewijzen dat $\triangle ABF$ en $\triangle EGA$ congruent zijn.

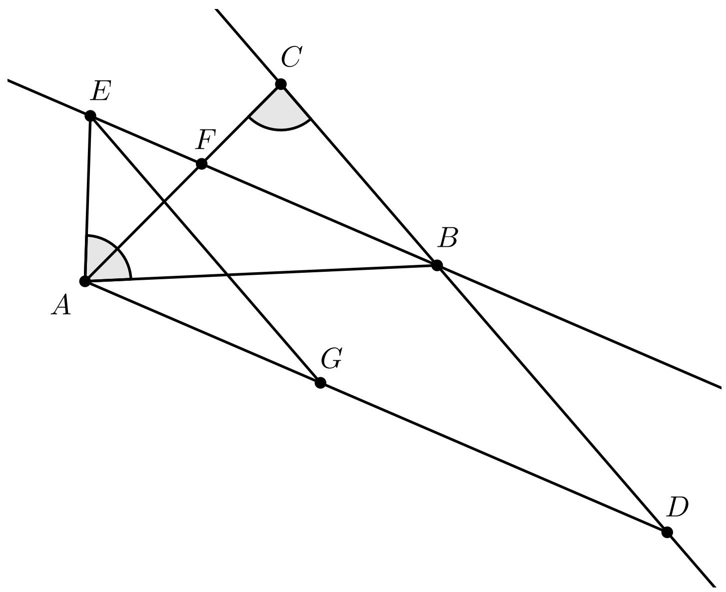
We zien dat $\angle EGA = \angle CDA$, omdat EG en BC evenwijdig zijn. Binnen de gelijkbenige driehoek ABD, zien we dat $\angle CDA = \frac{1}{2}(180° - \angle ABD)$, wat op zijn beurt gelijk is aan $\frac{1}{2}\angle ABC$ vanwege de gestrekte hoek. Nu is dat weer gelijk aan $\angle ABF$, omdat BF de bissectrice van $\angle ABC$ is. Al met al zien we dus dat $\angle EGA = \angle ABF$.

Driehoek ABD is gelijkbenig, dus $\angle BAG = \angle CDA$. Van die laatste hoek hadden we zojuist gezien dat hij gelijk is aan $\angle ABF$. Ook hadden we al gevonden dat $\angle EGA = \angle ABF$. Omdat de hoekensom in driehoek GEA gelijk is aan 180 graden, geldt nu

$$\angle GEA = 180° - \angle EGA - \angle EAB - \angle BAG = 180° - \angle ABF - \angle FCB - \angle ABF.$$

Nu is $2 \cdot \angle ABF$ gelijk aan $\angle ABC$ (want BF is de bissectice) en vinden we nu dus dat $\angle GEA = 180° - \angle FCB - \angle ABC = \angle BAC$ (vanwege de hoekensom in driehoek ABC), oftewel $\angle GEA = \angle BAF$.

Samen met $|AE| = |AF|$, wat volgt uit de gelijkbenigheid van $\triangle AEF$, zien we nu dat $\triangle ABF$ en $\triangle EGA$ congruent zijn. Het gevraagde volgt hier direct uit.



4. Versie voor klas 5 & klas 6

Zie de uitwerking van **versie voor klas 4 en lager**. Daar wordt als tussenstap eerst bewezen dat driehoek AEF gelijkbenig is (deel (a)).

5. Het kleinste aantal vragen dat nodig is, is 32. Eerst zullen we een strategie laten zien om in 32 vragen achter de locatie van de prijs te komen.

Aan het begin vraag je de quizmaster net zolang of de prijs achter de linkerdeur zit, totdat je het antwoord zeker weet. Je weet het antwoord pas 100% zeker als je 11 keer hetzelfde antwoord hebt gekregen. De quizmaster mag immers maximaal 10 keer liegen. Stel dat de quizmaster op dat moment n keer gelogen heeft. Dan heb je in totaal dus $11 + n$ keer een vraag gesteld en mag de quizmaster nog $10 - n$ keer liegen.

Daarna vraag je de quizmaster net zolang of de prijs achter de rechterdeur zit, totdat je het antwoord met 100% zekerheid weet. De quizmaster mag nog $10 - n$ keer liegen, dus er zijn hooguit $2(10 - n) + 1 = 20 - 2n + 1$ vragen nodig. In totaal heb je dan $32 - n$ vragen gesteld. Een strategie met 32 vragen is dus mogelijk.

Met maar 31 vragen is het niet altijd mogelijk om de locatie van de prijs te achterhalen. Hoe de quizmaster hiervoor kan zorgen laten we nu zien. In het begin, zolang je over beide deuren hoogstens tien vragen hebt gesteld, antwoordt hij elke keer met 'nee'. Voor het gemak mogen we wel aannemen dat de eerste deur waar je elf keer een vraag over stelt, de linkerdeur is. We bekijken nu de situatie dat de prijs juist niet achter de linkerdeur zit (dat kan gebeuren). In dit geval laten we zien dat de quizmaster kan zorgen dat je na 31 vragen niet weet of de prijs achter de middelste deur of achter de rechterdeur ligt.

De quizmaster heeft tot nu toe over de linkerdeur steeds de waarheid gesproken en dat blijft hij doen: bij de linkerdeur zegt hij elke keer 'nee'. Bij de rechterdeur blijft de quizmaster 'nee' zeggen tot en met de tiende vraag over deze deur. Daarna beantwoordt hij de volgende tien vragen over deze deur met 'ja'. Omdat je in totaal hoogstens 20 vragen over de rechterdeur stelt (want je hebt al minstens 11 vragen over de linkerdeur gesteld), hoeft de quizmaster niet meer dan 10 keer te liegen. Of de prijs nu achter de middelste deur of achter de rechterdeur ligt, de quizmaster geeft in beide gevallen dezelfde 31 antwoorden. Je kunt daarom onmogelijk achterhalen achter welke van de twee deuren de prijs ligt.