Finale klas 5 & klas 4 en lager

Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 18 september 2015
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. We maken groepjes van getallen. Elk groepje bestaat uit vijf verschillende getallen. Een getal kan in meerdere groepjes voorkomen. Als je twee willekeurige groepjes neemt, zijn er altijd precies vier getallen die in beide groepjes zitten.

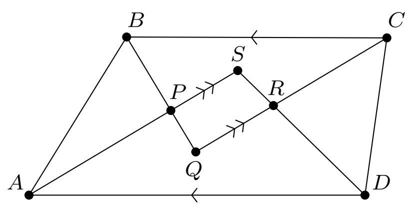
(a) Bepaal of het mogelijk is om 2015 groepjes te maken.

(b) Als in alle groepjes samen precies *zes* verschillende getallen moeten voorkomen, wat is dan het grootste aantal groepjes dat je kunt maken?

(c) Als in alle groepjes samen precies *zeven* verschillende getallen moeten voorkomen, wat is dan het grootste aantal groepjes dat je kunt maken?

2. Op een 1000×1000-bord leggen we dominostenen neer, zo dat elke dominosteen precies twee vakjes van het bord bedekt. Verder mogen de dominostenen niet aan elkaar grenzen; ze mogen elkaar wel in een hoekpunt raken.
Bepaal het maximum aantal dominostenen dat we zo op een bord kwijt kunnen.
Let op: je moet dus ook echt bewijzen *dat een groter aantal dominostenen niet mogelijk is.*

3. In vierhoek $ABCD$ zijn zijden BC en AD evenwijdig. In elk van de vier hoeken tekenen we een bissectrice. De bissectrices van hoeken A en B snijden elkaar in punt P, die van hoeken B en C snijden elkaar in punt Q, die van hoeken C en D snijden elkaar in punt R en die van hoeken D en A snijden elkaar in punt S. Veronderstel dat PS evenwijdig is aan QR.
Bewijs dat $|AB| = |CD|$.
Let op: het plaatje hiernaast is niet op schaal getekend.



4. Vind alle tweetallen priemgetallen (p, q) waarvoor geldt dat

$$7pq^2 + p = q^3 + 43p^3 + 1.$$

5. Gegeven zijn (niet noodzakelijkerwijs positieve) reële getallen a, b en c waarvoor geldt dat

$$|a - b| \geqslant |c|, \qquad |b - c| \geqslant |a| \quad \text{en} \quad |c - a| \geqslant |b|.$$

Hier is $|x|$ de absolute waarde van x, d.w.z. $|x| = x$ als $x \geqslant 0$ en $|x| = -x$ als $x < 0$.
Bewijs dat een van de getallen a, b en c de som is van de andere twee.