Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 14 maart 2025 (π-dag)

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. 2025 : 1024 Om te zien wat de nieuwe verhouding is van de zijden van de rechthoek na een keer knippen, kunnen we het grootste getal in de verhouding delen door twee, of juist het kleinste getal vermenigvuldigen met twee. We zien dus dat na de eerste 11 keer knippen de verhoudingen achtereenvolgens

$$2025 : 2, \quad 2025 : 4, \quad 2025 : 8, \quad \ldots, \quad 2025 : 1024, \quad 2025 : 2048$$

worden, aangezien $2^{11} = 2048$. Nu is de tweede zijde juist de langste zijde geworden en na nog een keer knippen wordt de verhouding weer 2025 : 1024. We zien dat de verhouding afwisselend 2025 : 2048 en 2025 : 1024 wordt. Omdat we in totaal een even aantal keer knippen, is de verhouding na 100 keer knippen dus hetzelfde als de verhouding na 12 keer knippen: 2025 : 1024.

B2. 61 We kunnen met één van de cijfers 1 tot en met 9 beginnen. Daarna moeten we drie keer de keuze maken of het volgende cijfers juist één hoger of één lager is; dat kan op 8 manieren. In totaal zijn er dus hoogstens 72 glooiende getallen van 4 cijfers. We moeten wel opletten dat een cijfer niet kleiner dan 0 of groter dan 9 kan worden.

Als we met een 1 beginnen, kan het derde cijfer niet twee kleiner worden dan het eerste. Daardoor vallen er 2 mogelijkheden af en blijven 1010, 1012, 1210, 1212, 1232 en 1234 over. Op dezelfde manier zijn er maar 6 mogelijkheden voor het begincijfer 8.

Voor het begincijfer 2 valt er één mogelijkheid af omdat het laatste cijfer niet drie kleiner kan zijn dan het eerste. Op dezelfde manier zijn er voor het begincijfer 7 maar 7 mogelijkheden.

Na het begincijfer 9 moet direct een 8 komen. Die kan worden opgevolgd door 76, 78 of 98. Hier zijn dus maar 3 mogelijkheden.

Voor alle andere begincijfers zijn er wel 8 mogelijkheden. Hieronder volgt een tabel met het aantal mogelijkheden bij elk begincijfer.

begincijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aantal glooiende getallen	6	7	8	8	8	8	7	6	3

In totaal zijn er dus $6 + 7 + 8 + 8 + 8 + 8 + 7 + 6 + 3 = 61$ glooiende getallen van 4 cijfers.

B3. 41 We gaan de mogelijkheden systematisch af. Stel Sam kleurt het getal 1 blauw. Dan moeten 2 en 3 rood gekleurd zijn, maar zijn er vervolgens geen beperkingen voor de kleuren van 4 tot en met 7. Dit kan op $2^4 = 16$ manieren.

Stel Sam kleurt het getal 1 juist rood. Dan mogen 2 en 3 zowel rood of blauw zijn. We bekijken eerst de mogelijkheden voor de getallen 2, 4 en 5. Als 2 blauw is, dan moeten 4 en 5 rood zijn, en als 2 rood is, dan zijn er vier manieren om 4 en 5 te kleuren. In totaal zijn er dus 5 manieren om 2, 4 en 5 te kleuren in dit geval. We zien net zo dat er geheel onafhankelijk daarvan 5 manieren zijn om de getallen 3, 6 en 7 te kleuren. In totaal zijn er dus $5 \cdot 5 = 25$ manieren om de getallen te kleuren als 1 rood gekleurd is.

Al met al vinden we dus $16 + 25 = 41$ mogelijke kleuringen.

B4. 300 Zeg dat er A stukjes in een rij passen en B stukjes in een kolom. Dan liggen er $A-2$ stukjes op de bovenrand, $A-2$ stukjes op de onderrand, $B-2$ stukjes op de linkerrand en $B-2$ stukjes op de rechterrand. In totaal zijn er $A \cdot B$ stukjes. Het gegeven in de opgave kunnen we dus opschrijven als

$$4 + 2(A-2) + 2(B-2) = \frac{22}{100}AB.$$

We kunnen dit herschrijven als

$$11AB = 100A + 100B - 200 = 100(A + B - 2).$$

Omdat de rechterzijde een veelvoud van 100 is, moet $11AB$ ook een veelvoud van 100 zijn. De priemfactoren 2 en 5 van 100 komen niet voor in 11, dus AB moet een veelvoud van $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ zijn. We gaan de mogelijke verdelingen van de factoren 2, 2, 5 en 5 over A en B af. Om de berekeningen makkelijker te maken, herschrijven we $11AB = 100(A + B - 2)$ naar

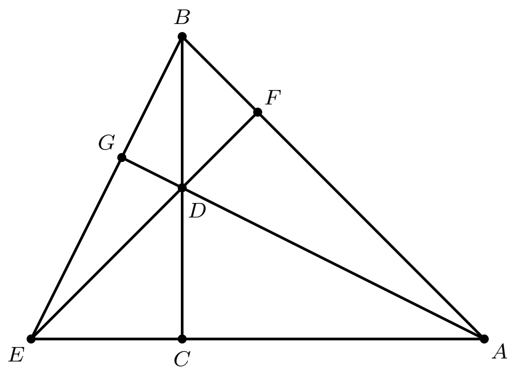
$$B = \frac{100A - 200}{11A - 100}.$$

Stel dat beide factoren 5 in A zitten, dan is A deelbaar door 25 en dus gelijk aan 25 of 50. Voor $A = 25$ krijgen we $B = \frac{92}{7}$ en voor $A = 50$ vinden we $B = \frac{32}{3}$, beide niet geheel. Dus de twee factoren 5 zitten niet allebei in A. Om dezelfde reden, met A en B andersom, zitten de twee factoren 5 niet in B. Dus zowel A als B is deelbaar door 5.

Verder moeten er ook nog factoren 2 verdeeld worden. Door A en B om te wisselen indien nodig, mogen we ervan uitgaan dat A een factor 2 bevat, dus A is een veelvoud van 10. We gaan de mogelijkheden $A = 10, 20, 30, 40$ af. Voor $A = 10$ geeft de vergelijking dat B gelijk zou moeten zijn aan 80 en dat kan niet. Voor $A = 20$ krijgen we $B = 15$. Voor $A = 30$ krijgen we $B = \frac{280}{23}$, dat niet geheel is. Voor $A = 40$ vinden we $B = \frac{190}{17}$ en ook dat is niet geheel.

De enige mogelijkheid is dus $A = 20$ en $B = 15$ (of andersom) en in totaal zijn er dus $20 \cdot 15 = 300$ stukjes.

B5. $6\sqrt{10}$ Laat F het snijpunt zijn van ED en AB. Driehoek ABC is een 'geodriehoek' met hoeken van 45, 45 en 90 graden. Vanwege de rechte hoeken bij F en C en de overstaande hoeken bij D, zien we dat er nog twee van deze 'geodriehoeken' zijn: driehoek BDF en driehoek EDC. Van deze laatste is de lengte van de korte zijde CD precies de helft van de lengte van de korte zijde AC van driehoek ABC. Hieruit volgt dat $|AE| = \frac{3}{2}|AC|$. Driehoek ABE heeft dus een $\frac{3}{2}$ keer zo lange basis en dezelfde hoogte BC als driehoek ABC. De oppervlakte van driehoek ABE is dus 150.



Verder heeft driehoek ABC oppervlakte gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot |BC|^2$, dus $|BC|^2 = 200$. Omdat $|CE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$, geldt $|CE|^2 = \frac{1}{4} \cdot 200 = 50$. Nu geeft de stelling van Pythagoras dat $|BE|^2 = |BC|^2 + |CE|^2 = 200 + 50 = 250$. We zien dus dat $|BE| = 5\sqrt{10}$.

In driehoek ABE zijn EF en BC hoogtelijnen, en omdat AG door hun snijpunt D gaat, is ook AG een hoogtelijn en staat dus loodrecht op BE. Omdat de oppervlakte van driehoek ABE nu zowel gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |AG| = \frac{5}{2}\sqrt{10} \cdot |AG|$ als aan 150, zien we dat $|AG| = 6\sqrt{10}$.

C-opgaven

C1. (a) In driehoek $P_0P_1P_2$ is hoek $\angle P_0P_2P_1$ ook gelijk aan α en dus is hoek $\angle P_0P_1P_2 = 180^\circ - 2\alpha$. Omdat hoek $\angle P_0P_1P_3$ gestrekt is, is hoek $\angle P_2P_1P_3$ gelijk aan 2α. We vinden dan dat $\angle P_1P_3P_2 = 2\alpha$ en $\angle P_1P_2P_3 = 180^\circ - 4\alpha$. Nu zien we dat

$$\angle P_4P_2P_3 = 180^\circ - \angle P_0P_2P_1 - \angle P_1P_2P_3 = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 4\alpha) = 3\alpha.$$

Omdat driehoek $P_2P_3P_4$ gelijkbenig is, geldt $\angle P_0P_4P_3 = 3\alpha$ en $\angle P_2P_3P_4 = 180^\circ - 6\alpha$. We zien nu ten slotte ook dat

$$\angle P_0P_3P_4 = \angle P_0P_3P_2 + \angle P_2P_3P_4 = 2\alpha + (180^\circ - 6\alpha) = 180^\circ - 4\alpha.$$

We zien dus dat driehoek $P_0P_3P_4$ precies dan gelijkbenig is als $3\alpha = 180^\circ - 4\alpha$, oftewel als $\alpha = \frac{180}{7}^\circ$.

(b) In onderdeel (a) hebben we gezien dat na 4 sprongen de basishoeken van de laatste gelijkbenige driehoek gelijk zijn aan 3α, dus de tophoek van die laatste gelijkbenige driehoek is $180^\circ - 6\alpha$. Van die gestrekte hoek bij P_3 is dus nog 6α over. De vorige gelijkbenige driehoek had basishoeken van 2α, dus de volgende gelijkbenige driehoek (als die nog kan) van 4α. En deze vijfde sprong kan zolang $4\alpha < 90^\circ$ omdat er dan nog een nieuwe gelijkbenige driehoek met basishoeken 4α gevormd kan worden. Als $4\alpha \geqslant 90^\circ$ lukt dat niet, omdat een gelijkbenige driehoek geen stompe of rechte basishoek kan hebben.

Door dit argument te herhalen zien we dat na n sprongen de basishoeken van de laatste gelijkbenige driehoek gelijk zijn aan $(n-1)\cdot\alpha$ en dat er nog een $(n+1)$-ste sprong gedaan kan worden zolang $n \cdot \alpha < 90^\circ$. Voor $\alpha = 6^\circ$ geldt dat $14 \cdot 6^\circ = 84^\circ$ zodat er nog wel een 15e sprong gedaan kan worden, maar $15 \cdot 6^\circ = 90^\circ$ zodat er geen 16e sprong meer gedaan kan worden. Het maximaal aantal sprongen is dus 15.

C2. (a) Voor $x = 10$ wordt de vergelijking

$$(y + 99)(y - 99) = 40y.$$

Dit kunnen we ook schrijven als $y^2 - 40y - 99^2 = 0$. Er geldt $99 = 9 \cdot 11$ dus $99^2 = 9^2 \cdot 11^2$. Omdat $9^2 = 81$ en $11^2 = 121$ precies verschil 40 hebben, zien we dat de vergelijking als volgt ontbonden kan worden: $(y + 81)(y - 121) = 0$. Hieruit volgt dat $y = -81$ of $y = 121$.

(b) We gaan de vergelijking nu oplossen voor algemene x. Deze keer kunnen we vergelijking herschrijven als

$$y^2 - (4x)y - (x^2 - 1)^2 = 0.$$

Net als bij onderdeel (a) zien we dat $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ en dus

$$(x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1).$$

We zien dat de twee factoren precies $4x$ verschillen. Dus de vergelijking ontbindt als

$$\left(y + (x-1)^2\right)\left(y - (x+1)^2\right) = 0.$$

Dit betekent dat $y = -(x-1)^2$ of $y = (x+1)^2$. In alle gevallen is ofwel y, dan wel $-y$ het kwadraat van een geheel getal.