Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 14 maart 2025 (π-dag)

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine of ander elektronisch hulpmiddel gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-opgaven hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$ of 3^{100}.

B1. Rowdy heeft een groot rechthoekig vel papier waarvan de zijden zich verhouden als 2025 : 1. Hij knipt het papier langs de verbindingslijn van de middens van de lange zijden in twee even grote rechthoekige stukken. Dan gooit hij één van die twee stukken weg, bekijkt hij van het overgebleven stuk welke zijden nu de lange zijden van de rechthoek zijn, en knipt hij dat stuk weer in twee even grote rechthoekige stukken langs de verbindingslijn van de middens van die lange zijden. Dit proces blijft hij herhalen tot hij in totaal 100 keer geknipt heeft.
Hoe verhouden de zijden van het papier zich na 100 keer knippen?

B2. Een positief geheel getal heet *glooiend* als elke twee naast elkaar staande cijfers van dit getal precies 1 verschillen. Voorbeelden van glooiende getallen zijn 2101 en 9876.
Hoeveel glooiende getallen van 4 cijfers (niet beginnend met een 0) zijn er?

B3. Sam wil elk van de getallen 1 tot en met 7 rood of blauw kleuren. Voor elk getal k van 1 tot en met 3 geldt dat als hij k blauw kleurt, dan moet hij $2k$ en $2k + 1$ allebei rood kleuren.
Op hoeveel manieren kan hij zo de getallen 1 tot en met 7 kleuren?

B4. Een rechthoekige legpuzzel bestaat uit hoekstukjes, randstukjes en middenstukjes (alle stukjes die niet op een hoek of aan de rand zitten). De stukjes passen netjes in rijen en kolommen. Zowel het aantal stukjes in de lengte als het aantal stukjes in de breedte is niet meer dan 50. Er geldt dat het aantal hoekstukjes plus het aantal randstukjes precies 22% is van het totaal aantal stukjes.
Uit hoeveel stukjes bestaat de hele puzzel?

B5. Driehoek ABC is een gelijkbenige rechthoekige driehoek met een rechte hoek bij C. Punt D is het midden van BC. De lijn door D loodrecht op AB snijdt het verlengde van AC in E. Het verlengde van AD snijdt BE in G.
Bepaal de lengte $|AG|$ van lijnstuk AG als gegeven is dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan 100.

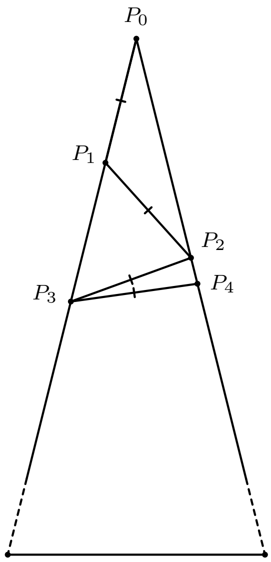
GA VERDER OP DE ACHTERKANT

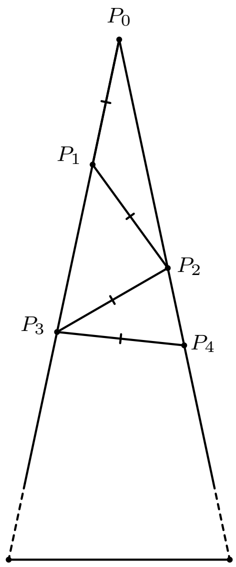
C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met een gedeeltelijke oplossing kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook je kladpapier in.

LET OP: Maak elke C-opgave op een apart vel papier en lever ook het bijbehorende kladpapier per opgave in.

C1. Een aap zit in de top P_0 van een heel hoge gelijkbenige driehoek met tophoek α en met een horizontale basis. Hij maakt steeds even grote sprongen, waarbij hij om en om landt op de linkerzijde en de rechterzijde van de driehoek. Hij springt nooit terug naar zijn vorige positie, maar altijd naar een positie die verder van P_0 ligt dan de vorige positie op die zijde. Als dat niet meer lukt, dan stopt hij met springen. De punten waarop de aap achtereenvolgens neerkomt, noemen we $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Hieronder zie je twee voorbeelden voor $n = 4$.





(a) Stel de aap springt vier keer ($n = 4$) en de laatste sprong is horizontaal, oftewel, $|P_0P_3| = |P_0P_4|$. Bereken de tophoek van de driehoek.

(b) Stel de tophoek van de driehoek is 6 graden. Hoe vaak kan de aap dan maximaal springen? (De driehoek is zo hoog dat hij de grond nooit bereikt.)

C2. We beschouwen de volgende vergelijking in x en y:

$$(y + x^2 - 1)(y - x^2 + 1) = 4xy.$$

(a) Stel $x = 10$. Wat zijn de mogelijke waarden van y waarvoor (x, y) een oplossing van de vergelijking is?

(b) Stel dat (x, y) een oplossing is van de vergelijking waarbij x een geheel getal is. Bewijs dat y of $-y$ het kwadraat is van een geheel getal.