Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 15 maart 2024

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. 19 Een envelop met breedte 30 kan op geen enkele andere envelop, en een envelop met hoogte 20 kan ook op geen enkele andere envelop. Dus voor de enveloppen met afmetingen 21×20, 22×20, $\ldots$, 30×20, 30×19, $\ldots$, 30×11 moet Milou 19 verschillende stapeltjes maken, met deze enveloppen onderop. Dat de rest van de enveloppen hier allemaal bovenop gelegd kunnen worden, kunnen we als volgt inzien. Bereken voor elke envelop het verschil tussen de breedte b en de hoogte h. Dit verschil is gelijk aan een getal van 1 tot en met 19, en voor alle 19 enveloppen die Milou al neergelegd heeft komt elk verschil precies 1 keer voor. Alle enveloppen waarvoor $b - h$ gelijk is, passen op hetzelfde stapeltje. Het stapeltje voor $b - h = 5$ ziet er bijvoorbeeld van onder naar boven als volgt uit: 25×20, 24×19, 23×18, 22×17 en 21×16. Milou kan alle enveloppen dus op 19 stapeltjes leggen en minder stapeltjes is onmogelijk.

B2. 712 Laten we systematisch tellen hoeveel cijfers de paginanummers bevatten, waarbij we nog geen rekening houden met het uitgescheurde vel. De pagina's 1 tot en met 9 hebben elk één cijfer, dus samen 9 cijfers. De pagina's 10 tot en met 99 zijn 90 pagina's met elk twee cijfers, dat zijn samen $90 \cdot 2 = 180$ cijfers. Voor de pagina's 1 tot en met 99 zijn dit dus samen 189 cijfers.

Noem het totaal aantal cijfers op de voor- en achterkant van het uitgescheurde vel x. Oorspronkelijk (vóór het uitscheuren) had het boek dus $2024 + x$ cijfers. Het aantal cijfers op de pagina's 100 t/m n is enerzijds dus gelijk aan $(2024 + x) - 189 = 1835 + x$. Omdat elk van de pagina's 100 t/m n drie cijfers heeft, is dat aantal cijfers anderzijds gelijk aan $3(n - 99)$. Omdat $2 \leqslant x \leqslant 6$ is dit aantal gelijk aan een van de getallen 1837 t/m 1841. Dit aantal moet ook deelbaar zijn door 3, dus blijft alleen 1839 over. We vinden dat $3(n - 99) = 1839$ en dus $n = 712$.

B3. 16 Noem het aantal leerlingen in de klas n. Omdat er maximaal 25 leerlingen in de klas zitten, is iedere leerling minimaal 4% van het totaal. De 94% leerlingen die meer dan 1 km van school wonen, moeten wel $n - 1$ leerlingen zijn: immers, het zijn niet alle n leerlingen, en $n - 2$ leerlingen kunnen maar maximaal 92% van het totaal zijn. Eén leerling is dus afgerond 6% van de klas.

Eén leerling correspondeert dus met een percentage tussen de 5,5 en 6,5. Dat betekent dat 31% overeenkomt met 5 leerlingen, want 4 leerlingen geven hoogstens $4 \cdot 6{,}5 = 26$ procent en 6 leerlingen geven minstens $6 \cdot 5{,}5 = 33$ procent.

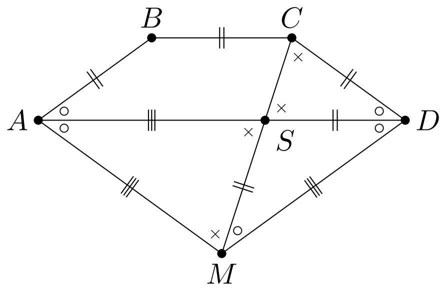
Vijf leerlingen correspondeert dus met een percentage tussen de 30,5 en 31,5. Dat betekent dat 15 leerlingen hoogstens $\frac{15}{5} \cdot 31{,}5 < 95$ procent uitmaken en 17 leerlingen minstens $\frac{17}{5} \cdot 30{,}5 > 17 \cdot 6 = 102$ procent. Het aantal leerlingen moet dus gelijk zijn aan 16.

B4. $\frac{4}{7}$ We bekijken eerst enkele kleinere gevallen met maar 0, 1 of 2 keer de cijfercombinatie 84:

$$\frac{4}{7} = \frac{4}{7}, \quad \frac{484}{847} = \frac{4 \cdot 121}{7 \cdot 121} = \frac{4}{7}, \quad \frac{48484}{84847} = \frac{4 \cdot 12121}{7 \cdot 12121} = \frac{4}{7}.$$

Ook voor ons heel grote getal A zien we direct dat $A = 484\ldots84 = 4 \cdot 121\ldots21$, terwijl we B kunnen zien als $7 \cdot 121\ldots21$. Hieruit volgt dat $\frac{A}{B} = \frac{4}{7}$.

B5. 24 Vanwege symmetrie verdelen de lijnstukken van M naar de hoekpunten de tienhoek in tien congruente driehoeken. De hoek bij M van zo'n driehoek is gelijk aan $\frac{360°}{10} = 36°$ (in de figuur weergegeven met $\circ$) en de andere twee hoeken, die even groot zijn, zijn $\frac{180°-36°}{2} = 72°$ (in de figuur weergegeven met $\times$). Hieruit volgt dat de hoeken van de oorspronkelijke tienhoek elk $2 \cdot 72° = 144°$ zijn. Voor het vervolg gaan we niet meer naar de hele tienhoek kijken, alleen naar de "diamant" gegeven door de vijfhoek $ABCDM$. Zie het plaatje hiernaast.



Eerst kijken we naar vierhoek $ABCD$. De som van de vier hoeken is 360°. De hoeken bij B en C zijn 144° en de hoeken bij A en D, die vanwege de symmetrie van de tienhoek gelijk zijn, zijn dus 36°. Dit betekent dat het lijnstuk AD de hoeken $\angle MAB$ en $\angle MDC$ in precies twee stukken van 36° deelt. We weten dus ook gelijk dat $\angle MAS = 36°$ en $\angle MDS = 36°$.

Bekijk nu driehoek SDC. Omdat de som van de hoeken gelijk is aan 180°, vinden we dat hoek $\angle CSD = 180° - \angle CDS - \angle MCD = 180° - 36° - 72° = 72°$ en de driehoek is dus gelijkbenig. Hieruit volgt dat $|SD| = |CD| = 12$, de zijde van de tienhoek (in de figuur gemarkeerd met twee streepjes).

Dan driehoek MAS: vanwege overstaande hoeken is $\angle MSA = 72°$. We zagen al dat $\angle MAS = 36°$. Vanwege de hoekensom van 180° in driehoek MAS is $\angle AMS = 72°$ en ook deze driehoek is dus gelijkbenig. Hieruit volgt dat $|SA| = |MA|$, de straal van de tienhoek (in de figuur gemarkeerd met drie streepjes).

We bekijken de driehoek MDS. We zagen al dat $\angle MDS = 36°$, en in het begin zagen we ook dat $\angle DMS = 36°$. Wederom een gelijkbenige driehoek, dus $|MS| = |DS|$ en we zagen al dat dit gelijk is aan 12.

Ten slotte kunnen we het verschil tussen de omtrek van vierhoek $ABCD$ en de omtrek van driehoek DMS berekenen:

$$\begin{aligned}
&(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) - (|DM| + |MS| + |SD|)\\
&= (12 + 12 + 12 + (12 + |SA|)) - (|DM| + 12 + 12)\\
&= 24 + |MA| - |MD|\\
&= 24.
\end{aligned}$$

C-opgaven

C1. Laten we eens beginnen met $n = 9$. Dan kan de sprinkhaan als volgt springen: $1 - 3 - 6 - 8 - 5 - 2 - 4 - 7 - 9$. Je ziet dat de sprinkhaan eerst naar grotere getallen springt, dan telkens naar kleinere getallen, en daarna weer naar grotere getallen. Deze 'zigzag' kunnen we ook in het algemeen toepassen.

We maken onderscheid op basis van de rest van n bij deling door 3. Als $n = 3k$, dan kan de sprinkhaan als volgt springen:

$$1; \quad 3, 6, \ldots, 3(k-1); \quad 3(k-1)+2, 3(k-2)+2, \ldots, 5, 2; \quad 4, 7, \ldots, 3(k-1)+1; \quad 3k.$$

De sprinkhaan springt op de heenweg over drievouden, op de terugweg over drievouden plus 2, en dan op de tweede heenweg over drievouden plus 1.

Als $n = 3k + 1$, dan kan de sprinkhaan als volgt springen:

$$1; \quad 3, 6, \ldots, 3k; \quad 3k-2, 3(k-1)-2, \ldots, 7, 4; \quad 2, 5, 8, \ldots, 3(k-1)+2; \quad 3k+1.$$

Ten slotte vinden we voor $n = 3k + 2$ dat de sprinkhaan als volgt kan springen:

$$1, 3, 6, 4; \quad 2, 5, 8, \dots, 3(k-1)+2; \quad 3k+1, 3(k-1)+1, \dots, 7; \quad 9, \dots, 3k; \quad 3k+2.$$

Omdat $n \geqslant 9$ is $k \geqslant 3$. In bovenstaande oplossingen is voor $k \geqslant 3$ elk stukje van de 'zigzag' niet leeg, en bestaat er dus een oplossing.

Er zijn andere manieren om deze opgave op te lossen. Je kunt bijvoorbeeld ook een oplossing geven voor $n = 9, 10, 11, 12$ *en* 13 *en dan een oplossing voor* $n + 5$ *maken door te beginnen met een oplossing voor* n *en daar* $n+2, n+4, n+1, n+3, n+5$ *aan toe te voegen.*

C2. (a) Tel de posities van de letters 'L' bij elkaar op, waarbij de meest linker letter in het woord positie 1 heeft en de meest rechter letter positie n. We noemen dit getal de *L-som* van een woord. Voor elk woord is de L-som een niet-negatief geheel getal. Verder wordt de L-som bij elke zet die Eva doet, één lager. Immers, bij het verwisselen van 'L' en 'R' wordt de positie van de 'L' die Eva verwisselt, één lager. Aangezien de L-som niet negatief kan worden, kan Eva dus altijd maar een eindig aantal beurten doen.

(b) Van alle mogelijke woorden van lengte n die Eva bekijkt, is de L-som het grootste bij het woord 'RR…RL…LL', waarbij alle ℓ letters 'L' aan de rechterkant van het woord staan. De L-som is juist het kleinst bij het woord 'LL…LRR…R', waarbij alle ℓ letters 'L' aan de linkerkant van het woord staan. Bij dit woord kan Eva geen beurten meer doen, omdat er nergens een 'L' direct rechts van een 'R' staat.

De meest linker 'L' in 'RR…RL…LL' en de meest linker 'L' in 'LL…LRR…R' verschillen in positie $n - \ell$ van elkaar. Voor alle daaropvolgende letters 'L', van links naar rechts, geldt hetzelfde. Het verschil in L-som tussen deze twee woorden is dus $\ell(n-\ell)$. We zagen al dat de L-som van een woord precies één kleiner wordt bij elke beurt: een bovengrens voor het maximale aantal zetten is dus $\ell(n-\ell)$.

Eva kan ook daadwerkelijk $\ell(n-\ell)$ beurten doen als ze begint met het woord 'RR…RL…LL'. Voor de eerste $n-\ell$ beurten gebruikt ze alleen de meest linker 'L', en het resultaat is het woord 'LRR…RL…LL' met nog $\ell - 1$ keer een 'L' aan de rechterkant. Vervolgens kiest ze de tweede 'L' van links en maakt in $n - \ell$ beurten het woord 'LLRR…RL…LL' met nog $\ell - 2$ keer een 'L' aan de rechterkant. Dit doet Eva met alle ℓ de letters 'L'. In totaal kan ze $\ell(n-\ell)$ beurten doen voordat ze eindigt met 'L…LRR…R'.

(c) Uit de vorige deelopgaven zagen we al dat Eva maximaal $\ell(n-\ell)$ beurten kan doen. Bekijk de functie $f(\ell) = \ell(n-\ell)$. Dit is een kwadratische functie met nulpunten bij $\ell = 0$ en $\ell = n$. Het maximum ligt dus bij $\ell = \frac{1}{2}n$. Als n even is, dan kan Eva zo veel mogelijk beurten doen bij $\ell = \frac{n}{2}$. (Het aantal beurten is dan $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{4}n^2$.) Als n oneven is, ligt het maximum van deze functie niet op een gehele waarde van ℓ en zien we dat Eva zoveel mogelijk beurten kan doen bij $\ell = \frac{n-1}{2}$ en $\ell = \frac{n+1}{2}$. (Het aantal beurten is dan $f\left(\frac{n-1}{2}\right) = f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{4}(n^2-1)$.)

© 2024 Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade