Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

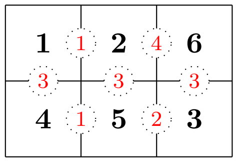
vrijdag 11 maart 2022

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

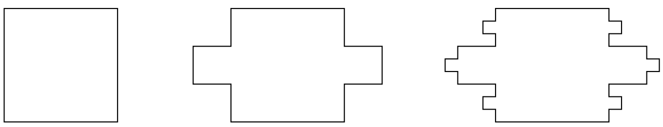
Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$ of 3^{100}.

B1. We plaatsen in een 3×2-rechthoek in elk hokje een van de getallen 1 tot en met 6 zodat elk getal precies eenmaal voorkomt. De *score* van zo'n verdeling berekenen we als volgt: voor elke twee aan elkaar grenzende hokjes berekenen we het verschil tussen hun twee getallen en vervolgens tellen we deze verschillen bij elkaar op. In het voorbeeld hiernaast zijn de verschillen in het rood aangegeven. Deze verdeling heeft een score van 17.
Wat is de laagst mogelijke score van zo'n verdeling?



B2. Voor hoeveel gehele getallen n met $1 \leqslant n \leqslant 800$ geldt dat $8n + 1$ een kwadraat is?

B3. We beginnen met een vierkant met zijde 1. In de eerste minuut groeien er midden op de verticale zijden vierkantjes met zijde $\frac{1}{3}$. In de volgende minuut groeien er midden op alle verticale lijnstukjes van de nieuwe figuur vierkantjes met zijdes ter lengte van $\frac{1}{3}$ van die lijnstukjes. Zie hieronder voor de situatie na 0, 1 en 2 minuten.



Dit proces gaat zo door. Iedere minuut groeit op het midden van ieder verticaal lijnstukje een vierkant met een zijde van $\frac{1}{3}$ van de lengte van dat lijnstuk. Na een uur zijn er 60 keer vierkantjes gegroeid.
Wat is de omtrek van de figuur na een uur?

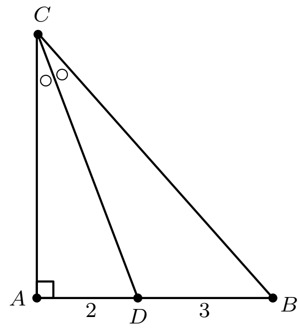
GA VERDER OP DE ACHTERKANT

B4. De snoepwinkel verkoopt chocolaatjes in de smaken wit, melk en puur. Je kunt ze kopen in drie kleuren dozen. De drie kleuren dozen hebben de volgende inhoud:

- Goud: 2 wit, 3 melk, 1 puur,
- Zilver: 1 wit, 2 melk, 4 puur,
- Brons: 5 wit, 1 melk, 2 puur.

Lavinia koopt een aantal dozen chocolaatjes (minstens één) en bij thuiskomst blijkt ze van alle smaken precies evenveel chocolaatjes te hebben.
Hoeveel dozen heeft Lavinia minstens gekocht?

B5. In een driehoek ABC is hoek A een rechte hoek. Op lijnstuk AB ligt een punt D zo dat de hoeken ACD en BCD even groot zijn. Er geldt $|AD| = 2$ en $|BD| = 3$.
Wat is de lengte van lijnstuk CD?



C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met een gedeeltelijke oplossing kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook je kladpapier in.
LET OP: Maak elke C-opgave op een apart vel papier en lever ook het bijbehorende kladpapier per opgave in.

C1. Alicia schrijft a verschillende gehele getallen op een blaadje en Britt schrijft b verschillende gehele getallen op een ander blaadje. Alicia heeft minstens één getal opgeschreven dat Britt niet heeft en Britt heeft minstens één getal opgeschreven dat Alicia niet heeft. Vera telt hoeveel verschillende getallen er op de twee blaadjes samen staan; noem dat aantal v. Daan telt hoeveel van de getallen die Alicia heeft opgeschreven, ook opgeschreven zijn door Britt; noem dat aantal d. Schrijft Alicia bijvoorbeeld de getallen 1, 2 en 5 op, en Britt de getallen 2, 5, 7 en 8, dan geldt $a = 3$ en $b = 4$ terwijl $v = 5$ en $d = 2$.

(a) Vind een voorbeeld waarbij $a = b = 2022$ en $a \cdot b = d \cdot (v + d)$.

(b) Is het mogelijk dat $a \cdot b = d \cdot (v + 4)$? Geef een voorbeeld of bewijs dat dit niet kan.

(c) Is het mogelijk dat $a \cdot b = d \cdot v$? Geef een voorbeeld of bewijs dat dit niet kan.

C2. We noemen een positief geheel getal *zonnig* als het uit vier cijfers bestaat en als bovendien elk van de twee buitenste cijfers precies 1 groter is dan het cijfer ernaast. De getallen 8723 en 1001 zijn bijvoorbeeld zonnig, maar 1234 en 87245 zijn dat niet.

(a) Hoeveel zonnige getallen zijn er waarvan het dubbele ook weer een zonnig getal is?

(b) Bewijs dat elk zonnig getal groter dan 2000 deelbaar is door een getal van drie cijfers dat een 9 in het midden heeft.