Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 12 maart 2021

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. 2020 We bekijken een klein stukje van de drie rijen getallen onder elkaar.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & a & b & c & d & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a & b & c & d & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a & b & c & d & \dots \end{array}$$

In de twee middelste kolommen zien we dat als we de getallen uit de kolom met d, c en b optellen, dan krijgen we 3 meer dan wanneer we de getallen uit de kolom met c, b en a optellen. Dit geeft dat $(d+c+b)-(c+b+a)=3$, oftewel $d-a=3$. Dat betekent dat als we in de bovenste rij drie plaatsen verder gaan, het getal 3 groter wordt.

We zijn op zoek naar het 2021e getal in de rij. Omdat 2021 bij deling door 3 rest 2 geeft, hoeven we alleen maar te kijken wat er gebeurt met de getallen die op een plek staan die rest 2 geeft bij deling door 3. Het tweede getal is 1, het vijfde getal (drie plaatsen verder) is dan $1+3=4$, enzovoorts. Die rij ziet er zo uit:

$$\dots, 1, \dots, \dots, 4, \dots, \dots, 7, \dots, \dots, 10, \dots, \dots, 13, \dots$$

In het algemeen zien we dat voor een getal n dat rest 2 geeft bij deling door 3, het n-de getal in de rij gelijk is aan $n-1$. Het 2021e getal is dus 2020.

B2. 50 Bekijk een willekeurig combigetal. We gaan eerst bewijzen dat dit uit ten minste 50 cijfers bestaat. Daarna laten we zien dat er ook daadwerkelijk een combigetal met precies 50 cijfers bestaat.

Merk op dat als we in een combigetal dezelfde cijfers overal verwisselen, we nog steeds een combigetal krijgen: je kan bijvoorbeeld alle drieën vervangen door enen en omgekeerd. Op die manier hoeft een combigetal nooit met een nul te beginnen.

Stel dat het cijfer c niet op de eerste of de laatste plaats in het combigetal staat. Iedere keer dat c voorkomt in het combigetal, vormt het een tweetal met zowel zijn linker- als rechterbuur. Aangezien c in 9 tweetallen moet voorkomen, moet c dus (minstens) 5 keer in het combigetal staan.

Stel dat c het eerste of het laatste cijfer is, maar niet allebei. Dan moet c ook 5 keer in het combigetal voorkomen, omdat de c in het begin (of aan het eind) maar in één tweetal zit. Als het eerste en het laatste cijfer van het combigetal hetzelfde cijfer c is, dan heb je c zes keer nodig.

In totaal zien we dus dat ieder cijfer van 0 t/m 9 minstens vijf keer voor moet komen in het combigetal. Het combigetal heeft dus minstens 50 cijfers. Het kan ook met precies 50 cijfers, bijvoorbeeld met het getal

$$98765432109753196307418529517394864208406283726150.$$

De manier waarop we dit getal hebben gemaakt is als volgt. We hebben alle mogelijke rijtjes van cijfers gemaakt met steeds dezelfde sprong. Dus 98765432109 *met een sprong van 1,* 975319 *en* 864208 *met een sprong van 2, et cetera. Deze rijtjes hebben we vervolgens op een handige manier aan elkaar geplakt. Er zijn natuurlijk heel vele andere manieren om een 50-cijferig combigetal te maken.*

B3. 15 We bekijken een figuur dat $n \geqslant 5$ rechthoekjes hoog is, en we gaan de vierkanten tellen. Omdat de kleine rechthoekjes 2 hoog zijn, kunnen er alleen vierkanten voorkomen met een even zijdelengte. De kleinste vierkanten die kunnen voorkomen, zijn 2×2-vierkanten. We zien dat er in elke rij 9 van zulke vierkanten voorkomen. In totaal zijn er dus $9n$ van zulke vierkanten in de figuur.

De op een na kleinste vierkanten die kunnen voorkomen, zijn 4×4-vierkanten. Zo'n vierkant ligt in twee aangrenzende rijen. Dat kunnen dus rijen 1 en 2, rijen 2 en 3, enzovoorts, tot en met rijen $n-1$ en n zijn. Dat zijn $n-1$ mogelijkheden voor de rijen. Als we nu kijken hoe de vierkanten over vier aangrenzende kolommen kunnen liggen, zien we dat er 7 mogelijkheden zijn. Een manier om dat te zien, is door te kijken naar de meest linker kolom van zo'n set van vier aangrenzende kolommen. De mogelijkheden voor de meest linker kolom zijn 1 tot en met 7 (als je vanaf kolom 8 begint, eindig je buiten de figuur). In totaal komen er dus $7(n-1)$ vierkanten met zijdelengte 4 in de figuur.

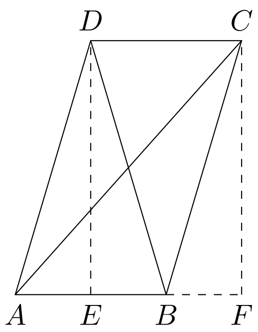
Op dezelfde manieren kunnen we de 6×6-vierkanten tellen; dat zijn er $5(n-2)$ in totaal. Er zijn $3(n-3)$ vierkanten met zijdelengte 8, en $1(n-4)$ vierkanten met zijdelengte 10 in de figuur. Grotere vierkanten kunnen niet voorkomen in de figuur. In totaal zijn er dus

$$9n + 7(n-1) + 5(n-2) + 3(n-3) + (n-4) = 25n - 30$$

vierkanten in de figuur. Als we nu de vergelijking $345 = 25n - 30$ oplossen, dan vinden de oplossing $n = \frac{375}{25} = 15$.

Aan het begin hadden we aangenomen dat $n \geqslant 5$. Deze aanname hebben we gedaan, omdat er anders geen 10×10-vierkanten in de figuur passen en de formules hierboven mogelijk niet kloppen. In het geval dat $n < 5$ zijn er natuurlijk minder vierkanten in de figuur dan in het geval $n \geqslant 5$. Hieruit volgt dat $n = 15$ de enige oplossing moet zijn.

B4. 9 We tekenen enkele hulplijnen, zoals in de figuur. Het parallellogram is $ABCD$ met $|AB| = 4$ en $|AD| = |BC| = 7$. We zijn op zoek naar $|AC|$.



Aangezien $|AD| = |BD|$, is driehoek $\triangle ABD$ een gelijkbenige driehoek. Laat E het punt zijn midden tussen A en B. Dan zijn de driehoeken $\triangle AED$ en $\triangle BED$ congruent en hoek $\angle AED$ is een rechte hoek.

Vanuit het punt C laten we een loodlijn neer op het verlengde van AB, noem het snijpunt F. Dan is $\angle DAE = \angle CBF$ vanwege F-hoeken, en $\angle AED = \angle BFC = 90°$ vanwege de loodlijn. Verder geldt $|AD| = |BC|$, dus we hebben de congruente driehoeken $\triangle AED \cong \triangle BFC$. Hieruit volgt dat $|BF| = 2$.

We passen nu de stelling van Pythagoras toe in driehoek $\triangle BFC$. Dit geeft dat voor de hoogte h van deze driehoek geldt dat $2^2 + h^2 = 7^2$, dus $h^2 = 45$. Nu passen we de stelling van Pythagoras toe in driehoek $\triangle AFC$ om de diagonaal $d = |AC|$ te vinden: $h^2 + 6^2 = d^2$, oftewel $45 + 36 = d^2$, dus $d = 9$.

B5. 57 Bekijk de situatie waarin we nog een vierde wiel aan de rij toevoegen met omtrek 2 cm. Het kleine wiel draait het allersnelst. Als het wiel van 14 cm een ronde heeft gemaakt, heeft het vierde wiel 7 rondes gemaakt. Een ronde van het wiel van 10 cm komt overeen met 5 rondes van het vierde wiel, en een ronde van het wiel van 6 cm komt overeen met 3 rondes van het kleine wiel.

Het totale aantal rondes dat het kleine wiel moet maken totdat we weer in de beginsituatie zijn, moet een veelvoud van 3, 5 en 7 zijn. Het kleinste getal dat een veelvoud van 3, 5 en 7 is, is het getal 105. In totaal maken de wielen van groot klein naar klein dan 15, 21 en 35 rondes. Dat betekent dat er hooguit $15 + 21 + 35 = 71$ fluittonen zijn, maar misschien zijn er ook minder, want het zou kunnen dat twee pijlen tegelijkertijd naar boven wijzen.

Precies halverwege de 105 rondes van het vierde wiel, hebben de andere wielen $7\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$ en $17\frac{1}{2}$ rondes gemaakt. Dat betekent dat ze alle drie naar boven wijzen. Dat zijn dus in ieder geval 2 fluittonen die we teveel geteld hebben.

Nu gaan we bekijken hoe vaak het gebeurt dat de twee grootste wielen allebei naar boven wijzen. Vanuit de situatie die we precies halverwege hadden, moet het vierde wiel dan een veelvoud van 5 en een veelvoud van 7 rondes vooruit draaien (of juist terugdraaien). Deze situatie komt dus voor na $52\frac{1}{2} - 35$ en $52\frac{1}{2} + 35$ rondes van het vierde wiel, geteld vanaf de beginsituatie. In deze situaties wijst de pijl van het derde wiel niet naar boven, aangezien 35 geen veelvoud van 3 is.

Op dezelfde manier vinden we dat het eerste en derde wiel tegelijk naar boven wijzen na $52\frac{1}{2} - 42$, $52\frac{1}{2} - 21$, $52\frac{1}{2} + 21$ en $52\frac{1}{2} + 42$ rondes van het vierde wiel. In deze situaties wijst het tweede wiel niet naar boven, aangezien 21 en 42 geen veelvouden van 5 zijn.

Ten slotte wijzen het tweede en derde wiel tegelijk naar boven na $52\frac{1}{2} - 45$, $52\frac{1}{2} - 30$, $52\frac{1}{2} - 15$, $52\frac{1}{2} + 15$, $52\frac{1}{2} + 30$ en $52\frac{1}{2} + 45$ rondes van het vierde wiel. In deze situaties wijst het eerste wiel niet naar boven, aangezien 15, 30 en 45 geen veelvouden van 7 zijn.

In totaal zijn er dus $2 + 4 + 6 = 12$ situaties waarin er precies twee van de pijlen naar boven wijzen. Dat zijn dus nog eens 12 fluittonen die we te veel geteld hebben. In totaal zijn er dus $71 - 2 - 12 = 57$ fluittonen te horen.

C-opgaven

C1. (a) Bekijk de situatie waarin de eerste speler 2 munten heeft, de tweede speler 0 munten en alle andere spelers 1 munt. Die situatie ziet er dus als volgt uit.

$$2\,0\underbrace{1\,1\cdots1\,1}_{n-2\text{ enen}}$$

Voor $n = 3$ is dat bijvoorbeeld de beginsituatie 201. *We zien dan dat de eerste en derde speler een munt aan de tweede speler geven. We krijgen dan de situatie* 120. *Dat is precies de situatie* 201 *als je alle spelers één plaats opschuift. We zien dus dat het spel niet eindigt.*
In dit geval moet de eerste speler een munt naar rechts geven, de derde speler moet een munt naar links geven en alle andere spelers geven geen munt weg. We eindigen dan met de volgende situatie.

$$1\,2\,0\underbrace{1\,1\cdots1\,1}_{n-3\text{ enen}}$$

Dit is precies dezelfde situatie als de beginsituatie, behalve dat het nu speler 2 is die 2 munten heeft en speler 3 die 0 munten heeft. Als we blijven doorspelen, zal er dus altijd een speler zijn met 2 munten en het spel zal dus nooit eindigen. □

(b) Voor $n \geqslant 4$ kunnen we de volgende beginsituatie bekijken.

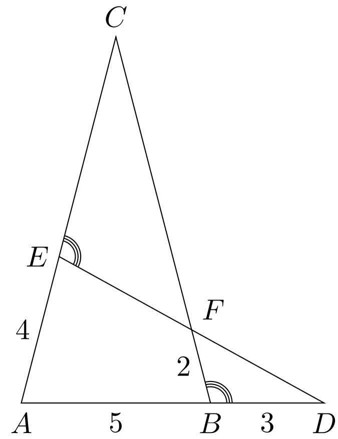
$$2\,0\,0\,2\underbrace{1\,1\cdots1\,1}_{n-4\text{ enen}}$$

Voor $n = 4$, is dat bijvoorbeeld de beginsituatie 2002. *Hier is er geen enkele speler met precies één munt. De eerste en laatste speler geven een munt aan tweede en derde speler respectievelijk. Het spel eindigt dan onmiddellijk.*
De eerste speler moet een munt naar rechts geven en de vierde speler moet een munt naar links geven. Alle andere spelers geven geen munt weg en er ontstaat dus een situatie waarin alle spelers precies 1 munt hebben. □

C2. (a) De situatie is zoals in de figuur hiernaast. Aangezien hoeken $\angle AEC$ en $\angle ABD$ gestrekt zijn, geldt er dat

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - \angle DEC = \angle AED.$$

Omdat hoek A in beide driehoeken voorkomt, hebben driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ dus twee gelijke hoeken en daarom zijn de driehoeken gelijkvormig. □



(b) Vanwege de gelijkvormigheid van driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ zijn de hoeken bij C en D gelijk. Samen met de gelijkheid $\angle DBF = \angle CEF$, volgt dat driehoeken $\triangle DBF$ en $\triangle CEF$ gelijkvormig zijn.

In een paar gelijkvormige driehoeken hebben alle paren van zijdes dezelfde verhouding. Gelijkvormigheid van de driehoeken $\triangle DBF$ en $\triangle CEF$ geeft dus dat

$$\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{|FD|}{|FC|} = \frac{|DB|}{|CE|}. \tag{1}$$

Omdat driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ gelijkvormig zijn, vinden we de verhoudingen

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|CA|}{|DA|}. \tag{2}$$

Met behulp van vergelijkingen (1) en (2) kunnen we nu $|CF|$ vinden. Uit de eerste en laatste verhouding in vergelijking (2) volgt dat

$$\frac{5}{4} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{4 + |EC|}{5 + 3}.$$

Hieruit volgt dat $|EC| = 6$. Dit vullen we vervolgens in bij de eerste en derde verhouding in vergelijking (1): $\frac{2}{|EF|} = \frac{3}{6}$. Hieruit volgt dat $|EF| = 4$. Uit de eerste en tweede verhouding in (1) vinden we nu dat $\frac{2}{4} = \frac{|FD|}{|FC|}$ dus $|FD| = \frac{1}{2}|CF|$. Ten slotte vullen we dit in bij de eerste en tweede verhouding in vergelijking (2):

$$\frac{5}{4} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = \frac{2 + |CF|}{4 + \frac{1}{2}|CF|}.$$

Kruislings vermenigvuldigen en oplossen van de vergelijking geeft dat $|CF| = 8$. □