Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 12 maart 2021

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi+1$ of 3^{100}.

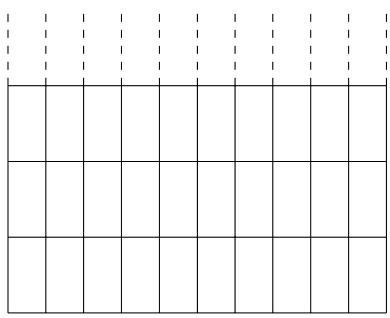
B1. Peter verveelt zich tijdens de lockdown. Hij besluit daarom een hele dag getallen op te schrijven. Hij maakt een rij getallen die begint met 0, 1 en -1 en daarna oneindig lang doorloopt. Op de regel eronder schrijft hij dezelfde rij getallen weer op, maar dan één plek opgeschoven. Op de derde regel schrijft hij nogmaals dezelfde rij getallen op, nu nog een plek doorgeschoven. Hij telt nu steeds de drie getallen onder elkaar bij elkaar op. (De eerste twee plekken slaat hij dus over en hij begint met $-1+1+0$). Dit levert als uitkomst telkens het volgende drievoud op. Het blaadje van Peter ziet er dus zo uit:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots \\
+ & & & 0 & 1 & -1 & \dots & \dots \\
\hline
 & & & 0 & 3 & 6 & 9 & 12
\end{array}$$

Het eerste getal in de bovenste rij is dus 0, het tweede getal 1, het derde getal -1, enzovoorts. Bepaal het 2021e getal in de bovenste rij.

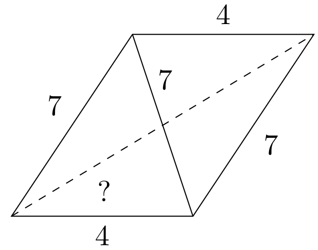
B2. Een geheel getal n heet een *combigetal* als elk tweetal verschillende cijfers uit alle mogelijke cijfers 0 t/m 9 op zijn minst één keer ergens in het getal naast elkaar voorkomen. Zo staan in een combigetal dus de 3 en de 5 ergens naast elkaar. Het maakt daarbij niet uit of ze in de volgorde 35 of 53 staan. We spreken af dat een combigetal niet met het cijfer 0 begint.
Wat is het kleinste aantal cijfers waaruit een combigetal kan bestaan?

B3. Een grote rechthoek is opgedeeld in kleine rechthoekjes die twee keer zo hoog als breed zijn. De rechthoek is 10 van zulke kleine rechthoekjes breed, zoals in de figuur hiernaast. In deze figuur kun je een aantal vierkanten herkennen van verschillende groottes.
Hoeveel rechthoekjes moet de figuur hoog zijn om te zorgen dat er precies 345 vierkanten in te vinden zijn?

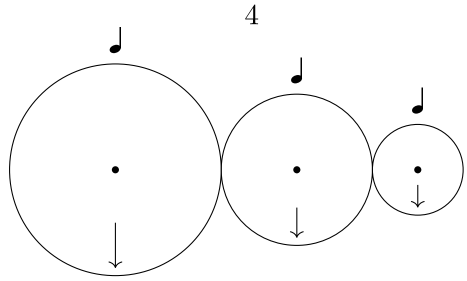


GA VERDER OP DE ACHTERKANT

B4. Een parallellogram heeft twee zijden van lengte 4 en twee zijden van lengte 7. Ook heeft een van de diagonalen lengte 7. (Let op: het plaatje hiernaast is niet op schaal.)
Hoe lang is de andere diagonaal?



B5. Drie wielen worden tegen elkaar gedrukt zodat ze bij draaiing niet slippen. De omtrek van de wielen is respectievelijk 14, 10 en 6 cm. Op elk wiel staat een pijl getekend die recht naar beneden wijst. Het grootste wiel wordt aan het draaien gebracht en de andere wielen draaien mee. Er wordt gestopt op het eerste moment dat de drie pijlen weer tegelijk naar beneden wijzen. Op de momenten dat een van de pijlen recht naar boven wijst, klinkt een fluittoon.
Als twee of drie pijlen op hetzelfde moment naar boven wijzen, klinkt er slechts één fluittoon.
Hoeveel fluittonen klinken er in totaal?



C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met een gedeeltelijke oplossing kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook je kladpapier in.
LET OP: Maak elke C-opgave op een apart vel papier en lever ook het bijbehorende kladpapier per opgave in.

C1. Aan een ronde tafel zitten $n \geqslant 3$ spelers. De spelleider verdeelt n munten onder de spelers, zodanig dat niet iedereen precies één munt heeft. De spelers kunnen van elkaar zien hoeveel munten iedereen heeft.
Om de 10 seconden luidt de spelleider een belletje. Op dat moment kijken alle spelers hoeveel munten hun buren hebben. Ze doen allemaal tegelijk het volgende:

- Heeft een speler meer munten dan minstens een van beide buren, dan geeft de speler precies één munt weg. Die geeft hij/zij aan de buur met de minste munten. Als beide buren evenveel munten hebben, wordt een munt gegeven aan de linkerbuur.
- Heeft een speler niet meer munten dan minstens een van beide buren, dan doet de speler niets en wacht op het volgende belletje.

Het spel eindigt als iedereen precies één munt heeft.

(a) Vind voor alle $n \geqslant 3$ een beginverdeling van de munten waarvoor het spel nooit eindigt (en laat zien dat dat voor de door jou gegeven beginverdeling inderdaad het geval is).

(b) Vind voor alle $n \geqslant 4$ een beginverdeling van de munten waarvoor het spel wel eindigt (en laat zien dat dat voor de door jou gegeven beginverdeling inderdaad het geval is).

C2. We bekijken een driehoek ABC en een punt D op het verlengde van AB aan de kant van B. Het punt E ligt op de zijde AC zo dat hoek $\angle DBC$ en hoek $\angle DEC$ gelijk zijn. Het snijpunt van DE en BC is F. Veronderstel dat $|BF| = 2$, $|BD| = 3$, $|AE| = 4$ en $|AB| = 5$. (Let op: het plaatje hiernaast is niet op schaal.)

(a) Toon aan dat de driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ gelijkvormig zijn.

(b) Bepaal $|CF|$.