Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 17 maart 2017

Uitwerkingen

B-opgaven

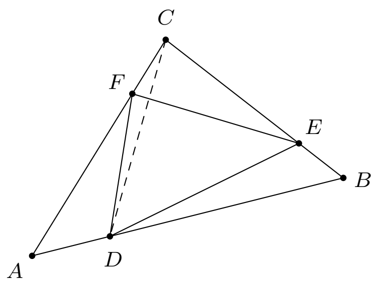
B1. 11 Van elke drie opeenvolgende gehele getallen is er altijd precies één een drievoud. Bekijk nu een rij van k opeenvolgende gehele getallen. Als k zelf een drievoud is, zeg $k = 3\ell$, dan zijn precies ℓ getallen uit de rij een drievoud: één in elk opeenvolgend groepje van drie getallen. Als k geen drievoud is, zeg $k = 3\ell + 1$ of $k = 3\ell + 2$, dan zijn zeker minstens ℓ van de getallen uit de rij een drievoud, want $k \geqslant 3\ell$. In alle gevallen geldt $3\ell \geqslant k - 2$ en is het aantal drievouden dus minstens $\ell \geqslant \frac{k-2}{3}$.

Van elke vijf opeenvolgende gehele getallen is er altijd precies één een vijfvoud. Bekijk nu een rijtje van k opeenvolgende gehele getallen. Als k een vijfvoud is, zeg $k = 5m$, dan is het aantal vijfvouden in het rijtje dus precies gelijk aan m. Als k geen vijfvoud is, zeg $k = 5m - 1$, $k = 5m - 2$, $k = 5m - 3$ of $k = 5m - 4$, dan zijn hoogstens m getallen uit de rij een vijfvoud. In alle gevallen geldt dat $5m \leqslant k + 4$ en is het aantal vijfvouden dus hoogstens $m \leqslant \frac{k+4}{5}$.

Als een evenwichtig rijtje lengte k heeft, dan moet dus gelden dat $\frac{k-2}{3} \leqslant \frac{k+4}{5}$. Aan beide zijden vermenigvuldigen met 15 geeft $5k - 10 \leqslant 3k + 12$. Hieruit volgt dat $2k \leqslant 22$ en dus dat $k \leqslant 11$.

Het rijtje $10, 11, \ldots, 20$ heeft lengte 11 en is evenwichtig. Immers, het bevat 3 drievouden en 3 vijfvouden. We concluderen daarom dat $k = 11$ de maximale lengte is van een evenwichtig rijtje.

B2. $\frac{35}{2}$ Als eerste gaan we de oppervlakte van driehoek BDE bepalen. We gebruiken hiervoor driehoek BCD. Uit de gegevens in de opgave leiden we af dat $|BD| = \frac{3}{4} \cdot |AB|$ en $|BE| = \frac{1}{4} \cdot |BC|$.



Als we basis AB van driehoek ABC vergelijken met basis BD van driehoek BCD, zien we dat $|BD|$ een factor $\frac{3}{4}$ keer zo groot is als $|AB|$, terwijl de driehoeken ten opzichte van deze bases dezelfde hoogte hebben. De oppervlakte van driehoek BCD is dus $\frac{3}{4} \cdot 40 = 30$.

Nu gaan we hetzelfde trucje toepassen op driehoeken BCD en BDE. Basis BE van driehoek BDE is $\frac{1}{4}$ keer zo groot als basis BC van driehoek BCD. De hoogtes zijn ten opzichte van deze bases hetzelfde. De oppervlakte van driehoek BDE is dus $\frac{1}{4} \cdot 30 = \frac{15}{2}$.

Op een soortgelijke manier kunnen we afleiden dat driehoeken CEF en ADF oppervlakte $\frac{15}{2}$ hebben. De oppervlakte van driehoek DEF is dus $40 - 3 \cdot \frac{15}{2} = \frac{35}{2}$.

B3. Meerdere opl. Een voorbeeld van een rij die werkt is de volgende:

0	1	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8

De rijen die door de tweede tot en met de zesde leerling worden geschreven zijn dan achtereenvolgens:

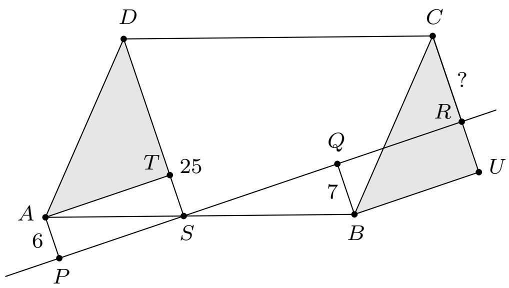
1	1	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8
2	2	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8
4	4	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

De rij die de zevende leerling opschrijft is daarna precies gelijk aan die van de zesde leerling.

Er zijn ook nog andere oplossingen voor deze opgave mogelijk. In alle gevallen moet gelden dat de tweede rij moet bestaan uit twee keer het getal 1*, twee keer het getal* 2*, vier keer het getal* 4 *en acht keer het getal* 8*.*

B4. 12 We zullen bewijzen dat geldt:

$$|AP| + |BQ| + |CR| = |DS|.$$



Hieruit volgt dan de gevraagde lengte:
$|CR| = |DS| - |AP| - |BQ| = 25 - 6 - 7 = 12$.

Laat T het voetpunt zijn van de loodlijn uit A op DS. Er geldt dat $APST$ een rechthoek is, dus $|ST| = |AP|$.

Nu rest nog te bewijzen dat $|DT| = |BQ| + |CR|$. Laat U het voetpunt zijn van de loodlijn uit B op de lijn door C en R. Omdat $BURQ$ een rechthoek is, geldt dat $|RU| = |BQ|$, zodat $|CU| = |BQ| + |CR|$. Driehoeken BUC en ATD zijn gelijkvormig, want de zijden van de twee driehoeken zijn paarsgewijs evenwijdig. Ook zijn de driehoeken even groot, want $|AD| = |BC|$. Hieruit volgt dat $|DT| = |CU|$ en dus dat $|DT| = |BQ| + |CR|$.

B5. 500 Bekijk eerst het blauwe blokje met nummer 2017. Alle gele blokjes moeten links daarvan liggen. Zo ook het gele blokje met nummer 1. Rechts van de gele 1 mag hooguit 1 blauw blokje liggen; dat is dus de blauwe 2017. We zien nu dat er rechts van de blauwe 2017 geen andere blauwe blokjes kunnen liggen. De blauwe 2017 is dus het meest rechter blokje van de rij.

Bekijk nu het blauwe blokje met nummer 2016. Dat ligt links van de gele 1 (dat zagen we net al). Er moeten minstens 2016 gele blokjes links van de blauwe 2016 liggen. Dat moeten dus de gele blokjes met de nummers 2 tot en met 2017 zijn. We weten nu dat het tweede blokje van rechts de gele 1 moet zijn.

Nu bekijken we het gele blokje met nummer 2. Dat gele blokje moet links liggen van de blauwe 2016 en de blauwe 2017. Alle andere blauwe blokjes moeten op hun beurt links liggen van de gele 2. Op die manier vinden we dat het derde blokje van rechts de blauwe 2016 is.

We kunnen zo door blijven redeneren en vinden dat er maar één rij mogelijk is, namelijk:

$$G_{2017},\ B_1,\ G_{2016},\ B_2,\ \ldots,\ G_2,\ B_{2016},\ G_1,\ B_{2017}.$$

Het 1000e blokje van links is dus de blauwe 500.

C-opgaven

C1. (a) Een geslaagde combinatie is 'BABC' met zowel boven als onder het rijtje 1101011101.
Alle andere oplossingen zijn van de vorm 'BABCBABC... BABC'.

(b) Stel dat we een geslaagde combinatie zouden hebben met alleen tegels van type B, C en D.

Bij deze tegels begint de bovenste rij altijd met een 1. In een geslaagde combinatie moet de onderste rij dus ook met een 1 beginnen. Daarmee valt type D af voor de eerste tegel. Type C valt ook af, omdat dan voor de tweede tegel de bovenste rij met een 0 moet beginnen. De eerste tegel van een geslaagde combinatie moet dus van type B zijn.

Daarna hebben we een tegel nodig waarvan de onderste rij met een 0 begint. Dat moet een tegel van type D zijn. Daarna hebben we weer een tegel nodig waarvan de onderste rij met een 0 begint, dus weer een tegel van type D. Hier komt geen eind aan. We hebben maar 1000 tegels van type D en nadat we die allemaal gebruikt hebben, hebben we weer een tegel nodig waarvan de onderste rij met een 0 begint. Dit is onmogelijk.

Er bestaat dus geen geslaagde combinatie met alleen tegels van type B, C en D.

Het bewijs van onderdeel (c) geeft ook een alternatief bewijs van onderdeel (b).

(c) Kijk eerst naar het totaal aantal enen op de bovenste en onderste rij van elk type tegel. Bij tegels van type B, D en E staan er boven en onder evenveel enen. Bij tegels van type C staan er onder meer enen dan boven. In een geslaagde combinatie moet het totaal aantal enen boven en onder gelijk zijn. We kunnen dus geen tegels van type C gebruiken (want dan zouden er onder meer enen komen dan boven).

We kunnen in een geslaagde combinatie dus alleen tegels van type B, D en E gebruiken. Tegels van type D hebben boven en onder evenveel cijfers staan, namelijk drie. Tegels van type B en E hebben echter boven meer cijfers staan dan onder. In een geslaagde combinatie moet het totaal aantal cijfers boven en onder gelijk zijn. We kunnen daarom geen tegels van type B en E gebruiken (want dan zouden er boven meer cijfers komen dan onder).

In een geslaagde combinatie mogen dus alleen tegels van type D voorkomen. Dat is echter niet mogelijk omdat tegels van type D boven met een 1 beginnen en onder met een 0. We concluderen dat er geen geslaagde combinatie is met alleen tegels van type B, C, D en E.

C2. (a) De kwadraten van twee cijfers zijn 16, 25, 36, 49, 64 en 81. We gaan de mogelijkheden per begin- en eindcijfer af.

Er staat geen tweecijferig getal in de lijst dat op een 2, 3, 7 of 8 eindigt. Ook staat er geen tweecijferig getal in de lijst dat met een 5 of 9 begint. We hoeven dus alleen de begin-/eindcijfers 1, 4 en 6 af te gaan.

Voor het begin- en eindcijfer 1 zien we dat we moeten beginnen met het kwadraat 16 en moeten eindigen met 81. We krijgen dus 1681. Voor het begin- en eindcijfer 4 zien we dat we met 49 moeten beginnen en met 64 moeten eindigen. Dit geeft 4964. Voor het begin- en eindcijfer 6 zien we dat we met 64 moeten beginnen en met 16 of 36 moeten eindigen. Dit geeft 6416 en 6436.

Er zijn dus vier kwadraatplakgetallen waarvan het eerste en vierde cijfer gelijk zijn, namelijk 1681, 4964, 6416 en 6436.

(b) Laat K een zescijferig kwadraatplakgetal zijn, zeg $K = \overline{abcdef}$, waarbij a, b, c, d, e en f de zes cijfers van K zijn. Dat K een kwadraatplakgetal is wil zeggen dat $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ en $\overline{ef}$ elk een tweecijferig kwadraat zijn, dus gelijk aan 16, 25, 36, 49, 64 of 81. We willen dat K een kwadraat is, zeg $K = n^2$. We bepalen de oplossingen per mogelijkheid van $\overline{ab}$.

$\boxed{\overline{ab} = 16}$ Omdat $K > 160000$ moet gelden dat $n > 400$. Schrijf $n = 400 + x$ met x een positief geheel getal. Er geldt $K = (400 + x)^2 = 160000 + 800x + x^2$. Omdat $K < 170000$ moet gelden dat $800x < 10000$ en dus $x \leqslant 12$.

Merk op dat de laatste twee cijfers $\overline{ef}$ van $K = 160000 + 800x + x^2$ gelijk zijn aan de laatste twee cijfers van x^2. Omdat de laatste twee cijfers van $10^2 = 100$, $11^2 = 121$ en $12^2 = 144$ geen kwadraat vormen vallen de mogelijkheden $x = 10, 11, 12$ af. Omdat $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ en $3^2 = 9$ maar één cijfer hebben, vallen de mogelijkheden $x = 1, 2, 3$ ook af.

We bekijken nu de overgebleven gevallen $x = 4, 5, 6, 7, 8, 9$. In deze gevallen is x^2 een getal van twee cijfers en vinden we dus dat $\overline{cd} = 8 \cdot x$. Alleen in het geval $x = 8$ is dit een kwadraat. Dit geeft dus één oplossing, namelijk $408^2 = 166464$.

$\boxed{\overline{ab} = 25}$ Analoog aan het vorige geval kunnen we nu schrijven $n = 500 + x$ met x een positief geheel getal. Er geldt dat $K = (500 + x)^2 = 250000 + 1000x + x^2$. Omdat $K < 260000$ moet gelden dat $1000x < 10000$ en dus $x \leqslant 9$.

We zien dat voor elke mogelijke keuze van x geldt dat het cijfer d gelijk is aan 0. Er zijn dus geen oplossingen.

$\boxed{\overline{ab} = 36}$ We schrijven $n = 600 + x$ met x een positief geheel getal. Er geldt dat $K = (600 + x)^2 = 360000 + 1200x + x^2$. Omdat $K < 370000$ volgt dat $1200x < 10000$ en dus $x \leqslant 8$. Ook moet gelden dat $x \geqslant 4$ omdat anders het cijfer e gelijk is aan 0.

Voor de overgebleven kandidaten $x = 4, 5, 6, 7, 8$ vinden we dat $\overline{cd} = 12 \cdot x$. Dit is echter voor geen van de mogelijke keuzes voor x een kwadraat. Er zijn dus geen oplossingen.

$\boxed{\overline{ab} = 49}$ We schrijven $n = 700 + x$ met x een positief getal. Er geldt $K = (700 + x)^2 = 490000 + 1400x + x^2$. Omdat $K < 500000$ geldt $1400x < 10000$ en dus $x \leqslant 7$. Net als in het vorige geval geldt ook weer $x \geqslant 4$ vanwege het feit dat het cijfer e niet 0 mag zijn.

Voor de overgebleven kandidaten $x = 4, 5, 6, 7$ vinden we dat $\overline{cd} = 14 \cdot x$ geen kwadraat is. Er zijn dus geen oplossingen.

$\boxed{\overline{ab} = 64}$ We schrijven $n = 800 + x$ met x een positief getal. Er geldt $K = (800 + x)^2 = 640000 + 1600x + x^2$. Omdat $K < 650000$ geldt $1600x < 10000$ en dus $x \leqslant 6$. Ook geldt weer dat $x \geqslant 4$.

Van de overgebleven kandidaten $x = 4, 5, 6$ is $\overline{cd} = 16 \cdot x$ alleen een kwadraat als $x = 4$. Dit geeft de oplossing $804^2 = 646416$.

$\boxed{\overline{ab} = 81}$ We schrijven $n = 900 + x$ met x een positief getal. Er geldt $K = (900 + x)^2 = 810000 + 1800x + x^2$. Omdat $K < 820000$ geldt $1800x < 10000$ en dus $x \leqslant 5$. Ook geldt weer $x \geqslant 4$.

Voor de overgebleven kandidaten $x = 4, 5$ vinden we dat $\overline{cd} = 18 \cdot x$ geen kwadraat is. Er zijn dus geen oplossingen.

We concluderen dat er in totaal twee kwadraatplakgetallen van zes cijfers zelf een kwadraat zijn, namelijk 166464 en 646416.