Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

18 januari – 4 februari 2021

Uitwerkingen

A1. D) 7 Uit de gegevens in de opgave leiden we af dat $a-b=\pm 2$, $b-c=\pm 3$ en $c-d=\pm 4$. We krijgen dan

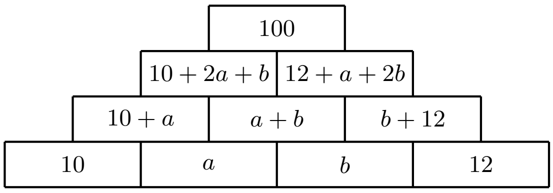
$$a-d=(a-b)+(b-c)+(c-d)=\pm 2\pm 3\pm 4.$$

We kunnen nu alle acht mogelijkheden voor de plus- en mintekens afgaan:

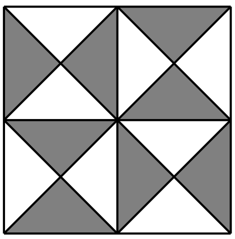
$$\begin{array}{rrrr} 2+3+4=9, & 2+3-4=1, & 2-3+4=3, & 2-3-4=-5, \\ -2-3-4=-9, & -2-3+4=-1, & -2+3-4=-3, & -2+3+4=5. \end{array}$$

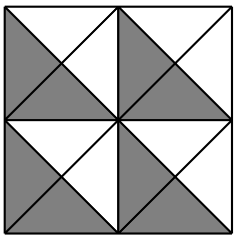
De enige waarde die niet voorkomt (noch met een plusteken, noch met een minteken) is 7.

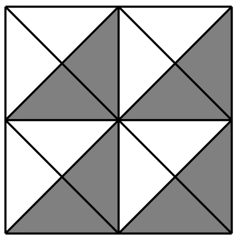
A2. D) 26 We noemen de twee ontbrekende getallen op de onderste rij a en b. We vullen de rest van de piramide in, zoals hiernaast. Helemaal bovenaan staat het getal $10+2a+b+12+a+2b=22+3(a+b)$. Omdat $a+b=x$ en we weten dat het bovenste getal gelijk is aan 100, vinden we dat $100=22+3x$, oftewel $x=26$.

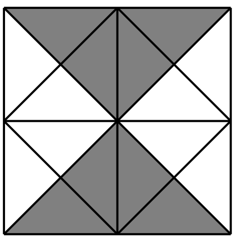


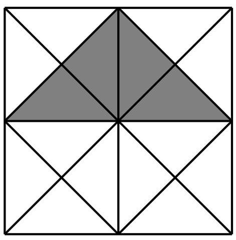
A3. D) 44 De driehoeken komen in vier verschillende groottes voor. Van klein naar groot is dit het aantal driehoeken: 16, 16, 8 en 4. Dit wordt ook geïllustreerd in de plaatjes hieronder. Het totaal aantal driehoeken is dus 44.

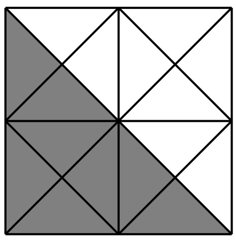

16


8


8


4


4*


4*

* = Door dit plaatje op vier verschillende manieren te draaien, krijg je vier verschillende driehoeken.

A4. B) 2 Merk allereerst op dat het gebouw van 5 hoog altijd zichtbaar is. We kijken eerst naar de middelste kolom, waar de 6 onder staat. Er moet wel gelden dat $6 = 1 + 5$: het eerste gebouw dat je ziet is 1 hoog, daarachter zie je het gebouw van 5 hoog. Daar kan geen gebouw tussen staan, want anders zouden we die ook vanaf de zijkant zien. Op die manier krijgen we de getallen in het eerste plaatje.

Nu kijken we naar de tweede rij, waarbij aan de rechterkant een 8 staat. Het gebouw van 1 hoog kan op deze rij vanwege de eerste eis alleen in de tweede of de vijfde kolom komen. Als de 1 in de vijfde kolom komt, klopt de 8 aan de rechterkant alleen als de volgorde $4 - 3 - 5 - 2 - 1$ wordt. Maar dat kan niet, want er staat al een 5 in de derde kolom. De 1 komt dus in de tweede kolom. We kunnen nu vanaf de rechterkant alleen nog een som van 8 krijgen als de gebouwen van hoogte 3 en 5 zichtbaar zijn. Daarom staat de 3 in de vijfde kolom en vanwege de eerste eis komt de vijf in de vierde kolom. Daarmee krijgen we de getallen zoals in het tweede plaatje.

	8				
4					**8**
			1		
		5		**?**	
3		**1**			
		6			

	8				
4	**1**	**2**	**5**	**3**	**8**
			1		
		5		**?**	
3		**1**			
		6			

	8				
	3				
4	**1**	**2**	**5**	**3**	**8**
	5		**1**		
		5		**?**	
3		**1**			
		6			

Ten slotte kijken we naar de 8 die bovenaan de tweede kolom staat. We zien al een 1 in de tweede rij. Dit gebouw kan niet te zien zijn. De zichtbare gebouwen van deze 8 zijn dus ook gebouwen van hoogte 3 en 5. Het gebouw met hoogte 3 komt in de bovenste rij en de 5 in de derde rij, want in de vierde rij staat al een 5 en als de 5 in de onderste rij zou staan, is ook het gebouw van hoogte 4 zichtbaar.

We hebben nu de cijfers ingevuld zoals op het derde plaatje. Ga nu verder met invullen zoals je een sudoku invult, zodat ieder cijfer precies één keer voorkomt in iedere rij en kolom. Je kunt de eerste kolom, de derde kolom, en de middelste rij helemaal invullen. Dan zie je dat op het vraagteken het getal 2 komt te staan.

A5. B) 15 We gaan van achter naar voren redeneren. Het getal 2021 is oneven, dus het laatste getal wat daarvoor opgeschreven was, moet wel 2022 geweest zijn. Voor het getal daarvoor zijn er nu twee mogelijkheden: 2023 of 1011. We gaan nu laten zien dat in de oplossing met het minimale aantal zetten dit getal 1011 geweest moet zijn. Met andere woorden: wanneer we in onze omgekeerde redenering kunnen delen door 2, dan is dat altijd het beste.

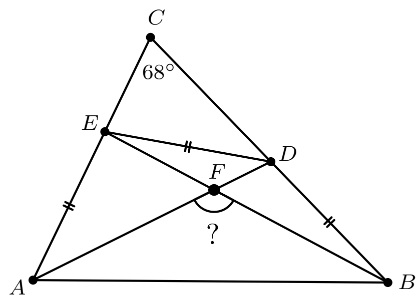
Stel nu dat we eerst een aantal keer 1 optellen bij 2022 voordat we delen door 2, zeg dat we n keer een 1 optellen en dan delen door 2. Dan houden we het getal $\frac{2022+n}{2}$ over. Omdat dit geheel moet zijn, moet n wel deelbaar door 2 zijn. Het getal $\frac{2022+n}{2}$ is ook gelijk aan $1011 + \frac{n}{2}$. We hadden dus ook eerst kunnen delen door 2 en dan $\frac{n}{2}$ keer 1 kunnen optellen. Omdat $\frac{n}{2}$ kleiner is dan n, kost dit minder zetten. Eerst delen door 2 is dus altijd optimaal.

De getallen die we van achter naar voren krijgen, zijn dus:

$$2021, 2022, 1011, 1012, 506, 253, 254, 127, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.$$

We zien dus dat er minstens 15 zetten nodig zijn om 2021 op te kunnen schrijven.

A6. E) $124°$ Eerst kijken we naar de linkerkant van het plaatje. We zien dat $\triangle AED$ een gelijkbenige driehoek is en dus zijn de hoeken $\angle EAD$ en $\angle EDA$ gelijk. De hoekensom van een driehoek is $180°$, dus geldt $\angle AED + 2 \cdot \angle EDA = 180°$. Omdat $\angle AEC$ een gestrekte hoek is, geldt ook dat $\angle AED + \angle CED = 180°$. Hieruit volgt dat $\angle CED = 2 \cdot \angle EDA$.



Via dezelfde redenering aan de rechterkant van het plaatje, beginnend vanuit de gelijkbenige driehoek $\triangle BDE$, volgt dat $\angle CDE = 2 \cdot \angle DEB$. Vanwege de hoekensom van $180°$ in de bovenste driehoek $\triangle ECD$ zien we dat

$$\begin{aligned}180° &= \angle ECD + \angle CED + \angle CDE \\ 180° &= 68° + 2 \cdot \angle EDA + 2 \cdot \angle DEB \\ 112° &= 2 \cdot (\angle EDA + \angle DEB) \\ 56° &= \angle EDA + \angle DEB\end{aligned}$$

Nu kijken we naar de driehoek $\triangle EFD$. De hoekensom is $180°$ en twee van de drie hoeken zaten al in eerdere driehoeken. Dus vinden we dat

$$\begin{aligned}180° &= \angle DEF + \angle EDF + \angle EFD \\ 180° &= \angle DEB + \angle EDA + \angle EFD \\ 180° &= 56° + \angle EFD \\ 124° &= \angle EFD\end{aligned}$$

Ten slotte merken we op dat $\angle AFB$ en $\angle EFD$ overstaande hoeken zijn en dus gelijk zijn. Dus de hoek bij het vraagteken is $124°$.

A7. A) 6 Het gemiddelde van de getallen 1 tot en met n is precies $\frac{n+1}{2}$. We kunnen de getallen namelijk opdelen in paren, waarbij er een getal alleen overblijft als n oneven is: 1 samen met n, 2 samen met $n-1$, et cetera. Het gemiddelde van elk paar is dan $\frac{n+1}{2}$.

Als we een getal wissen dan is het kleinste gemiddelde dat over kan blijven het gemiddelde van 1 tot en met $n-1$, wat precies $\frac{n}{2}$ is. We hebben dan immers het grootste getal uitgewist. Het grootst mogelijke gemiddelde dat over kan blijven, is het gemiddelde van 2 tot en met n, wat precies $\frac{n+2}{2}$ is.

We zien dus dat $\frac{n}{2} \leqslant \frac{45}{4}$ en $\frac{45}{4} \leqslant \frac{n+2}{2}$. Als we dat met 2 vermenigvuldigen krijgen we $n \leqslant \frac{45}{2} < 23$ en $22 < \frac{45}{2} \leqslant n+2$ en dus $n > 20$. Er zijn dus twee mogelijkheden: $n = 21$ of $n = 22$. We gaan nu laten zien dat $n = 22$ niet kan.

Als n gelijk aan 22 zou zijn, dan zouden er 21 getallen overblijven. We nemen dan het gemiddelde van 21 gehele getallen. Dat betekent dat we eerst 21 gehele getallen optellen en dan het resultaat door 21 delen. We krijgen dus een breuk van de vorm $\frac{S}{21}$. Dat kan nooit gelijk aan $\frac{45}{4}$ worden. De vergelijking $\frac{S}{21} = \frac{45}{4}$ geeft immers $4S = 21 \cdot 45$, maar $21 \cdot 45$ is niet deelbaar door 4.

We starten dus met de getallen 1 tot en met 21. De som daarvan is precies 21 keer het gemiddelde: $21 \cdot \frac{21+1}{2} = 21 \cdot 11 = 231$. Het gemiddelde van de overgebleven 20 getallen moet $\frac{45}{4}$ worden, dus de som van de overgebleven getallen moet $20 \cdot \frac{45}{4} = 225$ worden. Dat betekent dus dat we het getal $231 - 225 = 6$ weg moeten laten.

A8. D) 2027 We zien dat op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder precies de kwadraten van de oneven getallen komen te staan (1, 9, 25, 49, enzovoorts). Verder is het zo dat als je een zeker oneven getal op de diagonaal schrijft, het volgende oneven getal daar rechtsboven komt.

Het getal in rij n en kolom n is $(2n-1)^2$. In rij 23 en kolom 23 staat dus het getal $45^2 = 2025$. Het getal in rij 22 en kolom 24 staat hier rechtsboven. Dat is dus het volgende oneven getal: 2027.

B1. $\{14, 19\}, \{15, 18\}$ en $\{16, 17\}$ We noemen de cijfers van onze twee getallen a, b, c en d, zodat het eerste getal gelijk is aan $10a + b$ en het tweede getal gelijk is aan $10c + d$. We krijgen dus dat

$$S = 10(a + c) + b + d.$$

De getallen die we krijgen door de cijfers te verwisselen zijn $10b + a$ en $10d + c$. Als we die optellen krijgen we

$$4S = 10(b + d) + a + c.$$

Als we nu de eerste vergelijking met -4 vermenigvuldigen en bij de tweede vergelijking optellen, dan krijgen we

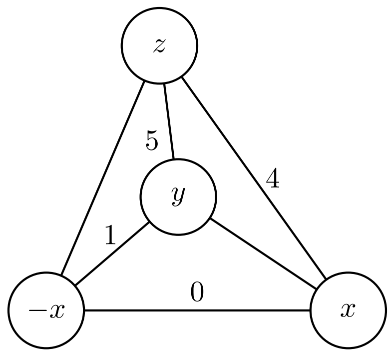
$$0 = -39(a + c) + 6(b + d), \qquad \text{oftewel} \qquad 13(a + c) = 2(b + d).$$

De rechterkant van de laatste vergelijking kan alleen deelbaar door 13 zijn, als $b+d$ deelbaar door 13 is. Maar $b + d$ is minimaal 0 en maximaal 18, dus dat kan alleen als $b + d = 0$ of $b + d = 13$.

Als $b + d = 0$, dan moet ook $a + c = 0$ gelden. Beide getallen beginnen dan met een 0 en dat was niet toegestaan. Die mogelijkheid valt dus af.

Als $b + d = 13$, dan moet $a + c = 2$ gelden. De cijfers a en c kunnen niet nul zijn. We hebben dus $a = c = 1$. Voor het paar $\{b, d\}$ hebben we de mogelijkheden $\{4, 9\}, \{5, 8\}$ en $\{6, 7\}$. De mogelijke beginparen zijn dus $\{14, 19\}, \{15, 18\}$ en $\{16, 17\}$. Het is eenvoudig na te gaan dat dit ook daadwerkelijk oplossingen zijn. In alle gevallen krijgen we als som $S = 33$ en als som van de omgekeerde getallen precies $132 = 4S$.

B2. -6 en $-\frac{21}{16}$ Als we alle zes de getallen op de lijnstukjes optellen, dan hebben we de getallen in de rondjes elk drie keer geteld. Aangezien $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, is de som van die vier getallen in de rondjes gelijk aan 5. Verder is het zo dat als we naar twee lijnstukjes kijken die niet aan dezelfde rondjes grenzen, en dus alle vier de rondjes één keer aandoen, de som hiervan gelijk is aan de som van de vier getallen in de rondjes, dus ook 5. Voor de drie paren van niet-aangrenzende lijnstukjes zijn de cijfercombinaties dus 0-5, 1-4 en 2-3.

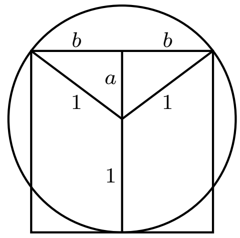


De getallen in de rondjes die grenzen aan het lijnstuk 0 verschillen een factor -1 van elkaar. Noem ze x en $-x$. Noem de andere twee getallen in de rondjes y en z. Het lijnstuk tussen y en z is dus 5. Vanwege symmetrie maakt het niet uit als we x en $-x$ omkeren, of y en z. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we het paar 1-4 dus invullen zoals hiernaast.

Er zijn nu nog twee manieren om de 2 en de 3 aan de lijnstukjes toe te kennen. Als we het lijnstukje tussen x en y gelijk stellen aan 3, dan krijgen we dat $y - x = 1$ en $y + x = 3$. Als we die twee vergelijkingen optellen, geeft dat $2y = 4$ en dus $y = 2$. Dan volgt dat $x = 1$, $-x = -1$ en $z = 3$. Het product van de vier getallen in de rondjes is dus $-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = -6$.

Voor de tweede oplossing stellen we het lijnstukje tussen x en y gelijk aan 2. Dat geeft $y - x = 1$ en $y + x = 2$. Als we die twee vergelijkingen optellen, geeft dat $2y = 3$ dus $y = \frac{3}{2}$. Dan volgt dat $x = \frac{1}{2}$, $-x = -\frac{1}{2}$ en $z = \frac{7}{2}$. Het product van de vier getallen in de rondjes is dus $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} = -\frac{21}{16}$.

B3. $\frac{8}{5}$ In het plaatje hiernaast hebben we de verschillende afstanden namen gegeven. Zo is a de afstand van het middelpunt van de cirkel tot de bovenste zijde van het vierkant en b de helft van de lengte van de zijde van het vierkant. Alle lijnstukken met lengte 1 zijn de straal van de cirkel.



Met de stelling van Pythagoras vinden we dat $a^2 + b^2 = 1$. Verder is $a + 1$ precies de lengte van de zijde van het vierkant, dus $a + 1 = 2b$, oftewel $a = 2b - 1$. Als we dat nu in de eerste vergelijking invullen, krijgen we $(2b - 1)^2 + b^2 = 1$. Dat kunnen we vereenvoudigen tot $5b^2 - 4b = 0$. Omdat we weten dat $b \neq 0$, kunnen we de vergelijking door b delen en krijgen we $5b - 4 = 0$, oftewel $b = \frac{4}{5}$. De lengte van de zijden van het vierkant is dus $2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$.

B4. 37 Om een indruk te krijgen van hoeveel kleuren we nodig hebben, gaan we een lijst maken van pincodes waarbij elke volgende pincode alle voorgaande pincodes domineert. We beginnen bij 0000 en eindigen bij 9999. Dan kan je bijvoorbeeld de volgende lijst vinden:

$$0000, 0001, 0002, \ldots, 0009, 0019, \ldots, 0099, 0199, \ldots, 0999, 1999, \ldots, 9999.$$

Er zijn nog veel andere lijsten van 0000 tot 9999 mogelijk. Alle pincodes in deze lijst moeten een andere kleur krijgen. Voor deze lijst heb je dus al 37 kleuren nodig.

We laten nu zien dat 37 kleuren voldoende zijn om alle mogelijke pincodes een kleur te geven. Als we alle vier de cijfers van een pincode bij elkaar optellen, krijgen we een getal dat we de *kracht* van de pincode noemen. Pincode 0000 heeft kracht 0 en 9999 heeft kracht 36. Alle pincodes hebben een kracht tussen 0 en 36. Als pincode A wordt gedomineerd door een andere pincode, zeg B, dan is de kracht van B groter dan de kracht van A. *(Andersom is niet waar: als pincode B een grotere kracht heeft dan pincode A, dan hoeft het niet zo te zijn dat pincode B pincode A domineert. Kijk bijvoorbeeld naar* 2021 *met kracht* 5 *en* 0089 *met kracht* 17*:* 2021 *wordt niet gedomineerd door* 0089*.)*

We gaan de kracht gebruiken om de pincodes een kleur te geven. Per kracht gebruiken we één kleur. Alle pincodes met dezelfde kracht krijgen dus dezelfde kleur, en pincodes met een verschillende kracht krijgen altijd een verschillende kleur. Op deze manier kan het nooit voorkomen dat pincode A wordt gedomineerd door een andere pincode B, maar dat A en B dezelfde kleur hebben. De kracht van een pincode is een getal uit $0, 1, \ldots, 36$. Met 37 kleuren kunnen we dus alle pincodes op de gevraagde manier kleuren. We hadden al gezien dat er minstens 37 kleuren nodig zijn, dus dit is ook het minimum aantal kleuren dat je nodig hebt.