Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 24 januari 2020

Uitwerking uitsmijter

Geef de antwoorden op de volgende vragen in exacte en zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm, zoals $\frac{1234}{5}$ of 6^{333}.

(a) De getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wordt als volgt gedefinieerd: $a_1 = 0$ en elke volgende term in de rij is uit te rekenen door $n = 1, 2, 3, \ldots$ in te vullen in de formule

$$a_{n+1} = a_n + 2n - 3.$$

Dus $a_2 = a_1 + 2 - 3$, $a_3 = a_2 + 4 - 3$, enzovoorts.
Bereken a_{1001}.

(b) De getallenrij $b_1, b_2, b_3, \ldots$ wordt als volgt gedefinieerd: $b_1 = 1$ en elke volgende term in de rij is uit te rekenen door $n = 1, 2, 3, \ldots$ in te vullen in de formule

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

waarbij tussen de haakjes steeds de som van alle vorige termen in de rij staat. Dus $b_2 = \frac{3}{1} \cdot b_1$, $b_3 = \frac{4}{2} \cdot (b_1 + b_2)$, enzovoorts.
Bereken b_{1001}.

Antwoorden.

(a) 998.000

(b) $1002 \cdot 2^{999}$

Uitwerking.

(a) We laten zien dat de getallen in de rij ook kunnen worden beschreven met de formule $a_n = (n-1)(n-3)$. Om dit te bewijzen, controleren we dat deze nieuwe formule voldoet aan alle gegevens. Ten eerste is volgens de nieuwe formule $a_1 = 0 \cdot -2 = 0$ en dat klopt met de gegeven a_1. Ten tweede geldt dat als $a_n = (n-1)(n-3)$ inderdaad klopt, dat dan ook de volgende term klopt met de nieuwe formule:

$$a_{n+1} = (n-1)(n-3) + 2n - 3 = n^2 - 4n + 3 + 2n - 3 = n^2 - 2n = n(n-2)$$

en dat klopt inderdaad. Dus deze formule is inderdaad goed en daaruit volgt direct dat $a_{1001} = 1000 \cdot 998 = 998.000$.

(b) In plaats van naar de losse termen in de getallenrij, kijken we nu naar de som van de termen. We laten zien dat deze som voldoet aan de formule $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n \cdot 2^{n-1}$. Voor $n = 1$ klopt dit: volgens onze nieuwe somformule is $b_1 = 1 \cdot 2^0 = 1$ en dat klopt met de gegeven b_1. Verder volgt uit $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n \cdot 2^{n-1}$ dat

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} &= n \cdot 2^{n-1} + b_{n+1} = n \cdot 2^{n-1} + \frac{n+2}{n} \cdot n \cdot 2^{n-1} \\ &= (n + (n+2)) \cdot 2^{n-1} = (n+1) \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = (n+1) \cdot 2^n \end{aligned}$$

en daarmee is aangetoond dat de formule voor de som van de termen klopt. Met behulp hiervan kunnen we nu een formule voor b_n geven:

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \frac{n+2}{n} \cdot n \cdot 2^{n-1} = (n+2) \cdot 2^{n-1},$$

dus $b_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$. Daaruit volgt direct dat $b_{1001} = 1002 \cdot 2^{999}$.