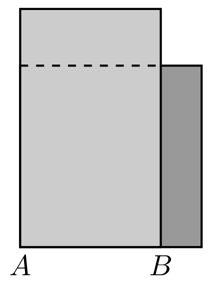
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

20 januari – 30 januari 2020

Uitwerkingen

A1. E) $13\frac{1}{3}$ De rechterzijde van de rechthoek snijdt de boven- en onderzijde van het vierkant op precies driekwart van die zijden. Dat wil zeggen dat $AB = 7\frac{1}{2}$ cm. De rechthoek heeft dezelfde oppervlakte als het vierkant: $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} = 100\text{ cm}^2$. We zien dus dat de lange zijde van de rechthoek lengte



$$\frac{100\text{ cm}^2}{7\frac{1}{2}\text{ cm}} = \frac{200}{15}\text{ cm} = \frac{40}{3}\text{ cm} = 13\tfrac{1}{3}\text{ cm}$$

heeft.

A2. C) Het was Kwak. Van de uitspraken van Kwik op zondag en maandag moet er precies één waar zijn. Stel dat Kwik op zondag de waarheid sprak. Dan loog hij op maandag en moet daarom ook op dinsdag gelogen hebben. Als Kwik juist op maandag de waarheid sprak, dan moet hij zondag gelogen hebben en dus ook op zaterdag. De dagen dat Kwik loog waren dus ofwel maandag en dinsdag, ofwel zaterdag en zondag.

Op dezelfde manier kunnen we de twee uitspraken van Kwak bekijken. De dagen dat Kwak loog waren ofwel zondag en maandag, ofwel dinsdag en woensdag. Omdat Kwik en Kwak nooit op dezelfde dag liegen, is er maar één mogelijkheid: Kwik heeft gelogen op zaterdag en zondag en Kwak op dinsdag en woensdag.

Op maandag spraken ze beiden de waarheid. Kwek en Kwik zijn dus onschuldig en Kwak heeft de snoeppot leeggegeten.

A3. D) 27 Noem de twee cijfers a en b, waarbij a het kleinste cijfer van de twee is (of a is gelijk aan b). Het getal is ijdel als $a + b \geqslant a \cdot b$. We gaan nu in een aantal gevallen na wanneer dat geldt.

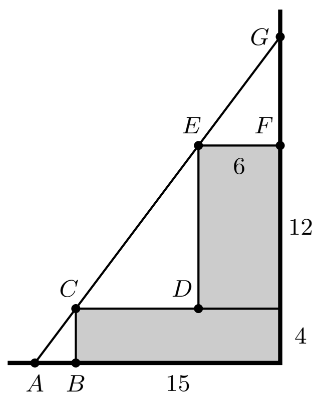
Als $a \geqslant 2$, dan geldt $a \cdot b \geqslant 2 \cdot b = b + b \geqslant a + b$; dat is precies de omgekeerde ongelijkheid. We zien dat er alleen gelijkheid kan gelden als a en b gelijk zijn (want er moet gelden $b + b = a + b$) en bovendien geldt dat $a = 2$ (want $b > 0$ en er moet gelden dat $a \cdot b = 2 \cdot b$). Het enige ijdele getal dat we zo vinden is 22.

In het geval $a \leqslant 1$ geldt $a \cdot b \leqslant b \leqslant a + b$. In dat geval is het getal dus altijd ijdel. We tellen nu de twee-cijferige getallen waarvan het kleinste cijfer een 0 of een 1 is. Dat zijn precies de getallen 10 tot en met 19 en de getallen $20, 21, 30, 31, \ldots, 90, 91$. Dat zijn 26 getallen.

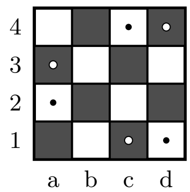
In totaal zijn er dus $1 + 26 = 27$ ijdele twee-cijferige getallen.

A4. A) 30 Bekijk de rechthoekige driehoek CDE in de figuur. We zien dat $CD = 15 - 6 = 9$ en $DE = 12$. Met de stelling van Pythagoras volgt dat $CE = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

Driehoek EFG is gelijkvormig met driehoek CDE, dus geldt dat $EG : EF = CE : CD$. We zien dat $EG : 6 = 15 : 9$, zodat $EG = \frac{6 \cdot 15}{9} = 10$. Op dezelfde manier zien we dat $AC : BC = CE : DE$, dus $AC : 4 = 15 : 12$. Er volgt dat $AC = \frac{4 \cdot 15}{12} = 5$. De lengte van de ladder is dus gelijk aan $AC + CE + EG = 5 + 15 + 10 = 30$.



A5. C) 10 We kleuren de vakjes van het 4×4-bord in een schaakbordpatroon en geven de vakjes van het bord namen van a1 tot en met d4 zoals in de figuur. We zien dat de sprinkhanen op witte vakjes allemaal naar een zwart vakje springen en de sprinkhanen op zwarte vakjes juist naar een wit vakje.



De vakjes die grenzen aan de vakjes a3, c1 en d4 zijn allemaal verschillend, dus de drie sprinkhanen van a3, c1 en d4 komen op drie verschillende witte vakjes terecht. Op dezelfde manier komen de drie sprinkhanen van a2, c4 en d1 op drie verschillende zwarte vakjes terecht. Na het springen zijn er dus minstens zes vakjes bezet.

We kunnen zorgen dat er na het springen ook echt maar zes vakjes bezet zijn. De sprinkhanen van de zwarte vakjes kunnen elk namelijk naar een van de vakjes a2, c4 en d1 springen en de sprinkhanen van de witte vakjes kunnen elk naar een van de vakjes a3, c1 en d4 springen.

Het kleinst mogelijke aantal bezette vakjes is dus 6 en het grootst mogelijk aantal lege vakjes is $16 - 6 = 10$.

A6. E) 9 Uit de eerste rij volgt dat

$$\mathrm{ADF} + \mathrm{F} = \mathrm{ABC}.$$

Het cijfer C is dus even en bovendien niet 0. De mogelijkheden zijn dus: 2, 4, 6 en 8. Uit de middelste rij volgt dan dat

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{GC} = \mathrm{ADD}.$$

Aangezien $2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 4 = 16$, $6 \cdot 6 = 36$ en $8 \cdot 8 = 64$, volgt nu dat het cijfer D een 4 of een 6 is. De laatste rij geeft vervolgens

$$\mathrm{D} \cdot \mathrm{GD} = \mathrm{CEF}.$$

Aangezien $4 \cdot 4 = 16$ en $6 \cdot 6 = 36$, moet het cijfer F nu wel de 6 zijn. Omdat de cijfers verschillend zijn, moet D de 4 zijn. De eerste rij geeft nu

$$\mathrm{A}46 + 6 = \mathrm{ABC}.$$

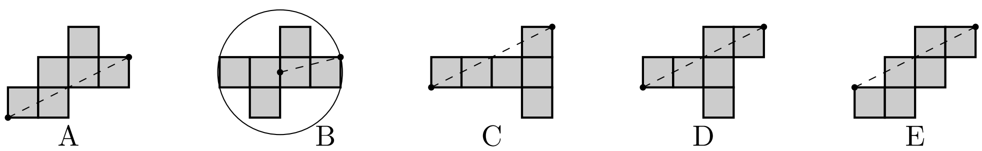
We zien dus dat B het cijfer 5 is en C het cijfer 2. De eerste kolom is nu

$$\mathrm{A}52 + \mathrm{A}44 = 2\mathrm{E}6.$$

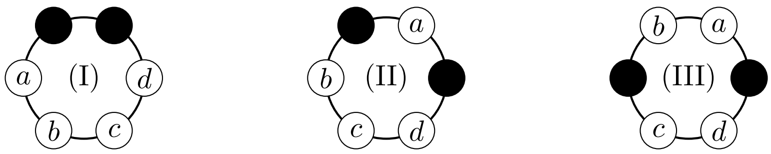
Het cijfer E is dus 9. *Daarnaast geldt* $\mathrm{A} = 1$ *en* $\mathrm{G} = 7$.

A7. B) B Als een figuur straal r heeft, dan is de afstand tussen twee punten van die figuur altijd hoogstens $2r$. In elk van de figuren A, C, D en E zijn twee punten aangegeven op afstand $2\sqrt{5}$. Elk van die figuren heeft dus een straal van $\sqrt{5}$ of meer.

De straal van figuur B is echter kleiner dan $\sqrt{5}$. Zoals aangegeven, past figuur B binnen een cirkel waarvan het kwadraat van de straal gelijk is aan $2^2 + (\frac{1}{2})^2 < 5$. We concluderen dat figuur B de kleinste straal heeft.



A8. B) 11 We verdelen de armbanden in drie groepen: (I) de zwarte kralen zitten naast elkaar, (II) er zit één kraal tussen de twee zwarte kralen in en (III) de zwarte kralen zitten tegenover elkaar. In elk van de gevallen tellen we op hoeveel verschillende manieren we de overige kralen kunnen plaatsen.



Groep (I) We moeten kiezen welke twee van de posities a, b, c, d de witte kralen worden. Hiervoor zijn zes mogelijkheden: ab, ac, ad, bc, bd en cd. De keuze bd geeft dezelfde armband als ac en de keuze cd geeft dezelfde armband als ab. In totaal vinden we dus 4 verschillende armbanden in groep (I).

Groep (II) Stel dat we a wit kiezen. Dit geeft twee verschillende armbanden: ac wit en ab wit. Als we ad wit kiezen krijgen we dezelfde armband als wanneer we ab wit kiezen. Als we a juist grijs kiezen krijgen we eveneens twee armbanden. Groep (II) heeft dus ook 4 verschillende armbanden.

Groep (III) We vinden 3 verschillende armbanden: ab wit, ac wit of ad wit. De andere drie mogelijkheden (bc, bd, cd) geven dezelfde armband als (respectievelijk) ad, ac en ab.

In totaal zijn er dus $4 + 4 + 3 = 11$ verschillende armbanden.

B1. 2 We bekijken de uitdrukking van achter naar voren. Door $2017 - 2018 - 2019 + 2020$ te nemen, krijgen we precies nul. Daarvoor kiezen we $2013 - 2014 - 2015 + 2016$ en zo gaan we door tot en met $5 - 6 - 7 + 8$. Aan het begin nemen we $1 + 2 + 3 - 4$ en zo krijgen we als uitkomst 2.

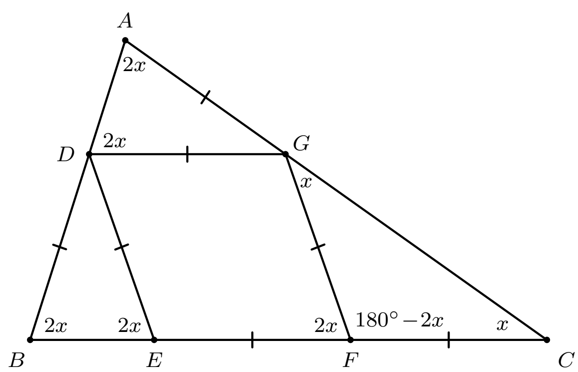
Nu hoeven we alleen te laten zien dat de uitkomst nooit gelijk is aan 1, waardoor 2 de kleinst mogelijke positieve uitkomst is. Dit is eenvoudig in te zien door op te merken dat de uitkomst altijd *even* is. De uitkomst 2 is immers even en als we een $+$ in een $-$ veranderen of andersom, dan verandert dat niks aan het wel of niet even zijn van de uitkomst. Alle mogelijke uitkomsten zijn dus even.

B2. 36 We bekijken eerst driehoek CGF (zie de figuur). De hoek bij C noemen we x (in graden). Omdat deze driehoek gelijkbenig is, is de hoek bij G ook gelijk aan x. De hoek bij F is dus gelijk aan $180° - 2x$. Er volgt dat in de ruit de hoek bij F gelijk is aan $180° - (180° - 2x) = 2x$.

Omdat DE en GF evenwijdig zijn, is wegens F-hoeken in driehoek BED nu ook de hoek bij E gelijk aan $2x$. Omdat driehoek BED gelijkbenig is, is ook de hoek bij B gelijk aan $2x$.

Op gelijke wijze kun je zien dat in driehoek ADG de hoek bij D gelijk is aan hoek B, want BC en DG zijn evenwijdig (F-hoeken). Ten slotte is ook hoek A hieraan gelijk omdat driehoek ADG gelijkbenig is. De hoeken bij A en bij D zijn dus gelijk aan $2x$.

Voor de hoekensom van driehoek ABC vinden we nu $x + 2x + 2x = 180°$. Dit geeft $x = 36°$. We concluderen dat de gevraagde hoek bij C gelijk is aan 36 graden.



B3. 5 Stel we noemen de drie getallen op Annemieks briefje a, b en c en we nemen aan dat $a < b < c$. Dan zijn de drie getallen op Barts briefje op volgorde van grootte $a+b$, $a+c$ en $b+c$. De laatste twee getallen zijn groter dan c en dus groter dan elk getal op Annemieks briefje. Het getal dat op beide briefjes staat, is dus $a+b$ en dat moet wel gelijk zijn aan c.

Annemiek heeft dus de getallen a, b en $a+b$ en Bart heeft $a+b$, $2a+b$ en $a+2b$. Als we nu naar $3b$ en $3(a+b) = 3a+3b$ kijken, zien we dat die getallen beide groter zijn dan alle getallen op Barts briefje. Het lievelingsgetal van Annemiek, dat op Barts briefje staat als je het met 3 vermenigvuldigt, is dus a.

Het getal $3a$ is dus een van de getallen $a+b, 2a+b, a+2b$ op Barts briefje, en omdat a en b verschillend zijn, moet dat wel het getal $a+b$ zijn. Met andere woorden: $b = 2a$. Bart heeft dus de getallen $3a$, $4a$ en $5a$. Het enige getal van die drie dat het getal 25 kan zijn, is $5a$. We zien dus dat $a = 5$ en dat is meteen het lievelingsgetal van Annemiek.

B4. 10 Bekijk in een rijtje een aaneengesloten stuk waarin geen munt van waarde 3 ligt. In dat stuk kan hooguit één munt van waarde 2 liggen, want anders krijgen we twee munten van waarde 2 met alleen munten van waarde 1 ertussen en dat kan niet. Omdat er hooguit één munt van waarde 2 is, kunnen er ook hooguit twee munten van waarde 1 zijn, want anders krijgen we twee munten van waarde 1 naast elkaar. De enige mogelijkheden voor zo'n stuk zonder munten van waarde 3 zijn dus

$$121,\ 12,\ 21,\ 2,\ 1.$$

Een rijtje van 2020 munten moet dus meerdere munten van waarde 3 hebben. Bekijk in een rijtje twee munten van waarde 3 waar geen andere munt van waarde 3 tussen ligt. Tussen die twee munten moeten minstens drie andere munten liggen. We hebben net gezien dat we dan precies drie munten hebben en dat 121 de enige mogelijkheid is.

Onze rij van 2020 munten ziet er dus zo uit:

$$\text{beginstuk-}\underbrace{312131213\cdots\cdots 31213}_{\text{aantal keer hetzelfde patroon}}\text{-eindstuk},$$

waarbij begin- en eindstuk alleen munten van waarde 1 en 2 bevatten. Voor het begin- en eindstuk zijn de enige mogelijkheden: 121, 12, 21, 2, 1, of geen munten.

De lengte van het herhalende stuk is een viervoud plus één. De lengte van dit stuk moet kleiner zijn dan $505 \cdot 4 + 1 = 2021$ en meer dan $503 \cdot 4 + 1 = 2013$, want anders zouden begin- en eindstuk samen meer dan 6 munten hebben. De lengte van het middenstuk is dus gelijk aan $504 \cdot 4 + 1 = 2017$ en begin- en eindstuk hebben samen $2020 - 2017 = 3$ munten. Voor begin- en eindstuk zijn er nu 10 mogelijkheden: aan het begin niks en op het eind 121 of andersom (in totaal 2 mogelijkheden); aan het begin 1 of 2 en op het eind 12 of 21 ($2 \cdot 2 = 4$ mogelijkheden); aan het begin 12 of 21 en op het eind 1 of 2 ($2 \cdot 2 = 4$ mogelijkheden).