Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 25 januari 2019

Uitwerking uitsmijter

We schrijven $\text{ggd}(a, b)$ voor het grootste (gehele) getal waar a en b allebei deelbaar door zijn (met een gehele uitkomst zonder rest). Zo is $\text{ggd}(10, 12) = 2$, $\text{ggd}(30, 12) = 6$ en $\text{ggd}(11, 12) = 1$. Bij bijvoorbeeld $\text{ggd}(n, n+2)$ hangt het antwoord af van de waarde van n: als n oneven is, zijn n en $n + 2$ door geen enkel getal groter dan 1 allebei deelbaar, maar als n even is, zijn n en $n+2$ allebei deelbaar door 2 (en verder door geen enkel ander getal groter dan 1). De mogelijke uitkomsten van $\text{ggd}(n, n + 2)$ zijn dus 1 en 2.

Hieronder mag n steeds variëren over de positieve gehele getallen.

(a) Wat zijn de mogelijke uitkomsten van $\text{ggd}(12n + 2, 30)$?

(b) Wat zijn de mogelijke uitkomsten van $\text{ggd}(3n + 4, 5n - 1)$?

(c) Wat zijn de mogelijke uitkomsten van $\text{ggd}(n^2 + 4n + 3, n + 8)$?

Antwoorden.

(a) 2 en 10

(b) 1 en 23

(c) 1, 5, 7 en 35

Uitwerking.

(a) Alle positieve getallen waar 30 deelbaar door is, zijn: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 en 30. De mogelijke uitkomsten kunnen alleen maar deze getallen zijn. Nu kijken we naar $12n + 2$. Dit is altijd even, aangezien 12 en 2 beide even zijn. Verder is het nooit deelbaar door 3, want 12 is deelbaar door 3 maar 2 niet. De oneven uitkomsten en de uitkomsten deelbaar door 3 vallen dus af. Alleen de mogelijkheden 2 en 10 blijven over. Die kunnen allebei: voor bijvoorbeeld $n = 1$ geldt $\text{ggd}(12n + 2, 30) = \text{ggd}(14, 30) = 2$ en voor $n = 4$ geldt $\text{ggd}(12n + 2, 30) = \text{ggd}(50, 2) = 10$.

(b) Als $3n+4$ deelbaar is door een of ander getal d, dan is $5 \cdot (3n+4) = 15n+20$ ook deelbaar door d. Net zo geldt: als $5n-1$ deelbaar is door d, dan is $3 \cdot (5n-1) = 15n-3$ ook deelbaar door d. We zoeken het grootste getal d waar $3n+4$ en $5n-1$ deelbaar door zijn; daar zijn $15n + 20$ en $15n - 3$ dus ook deelbaar door. Die laatste twee getallen hebben verschil 23. Omdat ze beide deelbaar zijn door d, moet ook 23 deelbaar zijn door d. (Stel bijvoorbeeld dat $d = 4$ en allebei de getallen zijn dus deelbaar door 4, dan is hun verschil ook altijd deelbaar door 4 en kan dus nooit 23 zijn.) Dus alleen 1 en 23 zijn mogelijk als de uitkomst van $\text{ggd}(3n+4, 5n-1)$. Bij bijvoorbeeld $n = 1$ krijg je $\text{ggd}(3n+4, 5n-1) = \text{ggd}(7, 4) = 1$. Omdat een waarde van n met uitkomst 23 te vinden, kun je even een lijstje maken van de waarden van $5n - 1$: $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$ en dan zie je dat $3 \cdot 23 = 69$ ook in dit rijtje voorkomt. Zo vinden we $n = 14$, dan geldt $\text{ggd}(3n + 4, 5n - 1) = \text{ggd}(46, 69) = 23$. We concluderen dat 1 en 23 inderdaad allebei kunnen voorkomen.

(c) Er geldt $n^2+4n+3 = (n+1)(n+3)$. Een getal d waar n^2+4n+3 deelbaar door is, kunnen we daarom schrijven als $d = d_1 d_2$ waarbij $n+1$ deelbaar is door d_1 en $n+3$ deelbaar is door d_2. Als $n+8$ ook deelbaar is door d, dan moet $n+8$ dus deelbaar zijn door zowel d_1 als d_2. De getallen $n+1$ en $n+8$ zijn alleen door hetzelfde getal d_1 deelbaar als hun verschil 7 daar ook deelbaar door is, en de getallen $n+3$ en $n+8$ zijn alleen deelbaar door hetzelfde getal d_2 als hun verschil 5 daar ook deelbaar door is. Er geldt dus $d_1 = 1$ of $d_1 = 7$, en $d_2 = 1$ of $d_2 = 5$. Combineren geeft de mogelijke uitkomsten 1, 5, 7 en 35. Deze kunnen allemaal. Voor bijvoorbeeld 35 heb je een n nodig zodat $n+1$ deelbaar is door 7 en $n+3$ deelbaar is door 5; dat geldt voor $n = 27$. En zo geeft $n = 1$ uitkomst 1, $n = 6$ uitkomst 7 en $n = 2$ uitkomst 5. We concluderen dat 1, 5, 7 en 35 allemaal kunnen voorkomen.