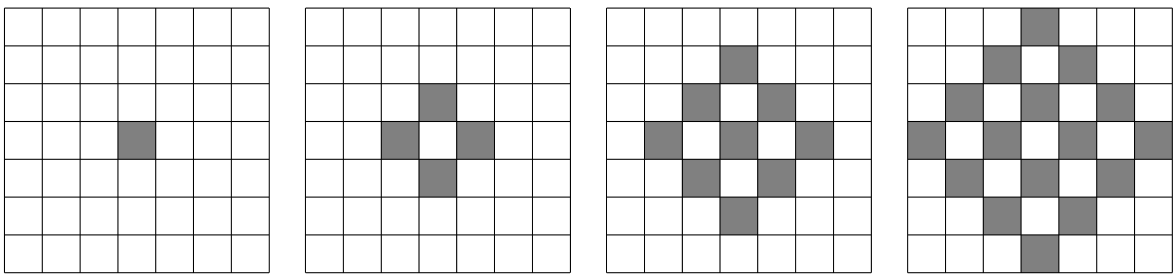
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

21 januari – 31 januari 2019

Uitwerkingen

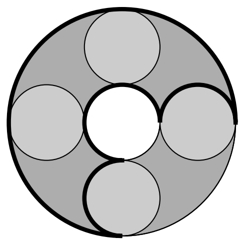
A1. E) 5 Van de getallen 1 en 9 kan Arthur er maar één opgeschreven hebben, want geen twee opgeschreven getallen tellen op tot 10. Hetzelfde geldt voor 2 en 8, voor 3 en 7 en ook voor 4 en 6. Van de acht getallen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 en 9 heeft Arthur er dus hooguit vier opgeschreven. Dat betekent dat hij het overgebleven getal 5 wel opgeschreven moet hebben.

A2. E) 10000 Als we kijken welke vakjes er op dag 1, 2, 3 en 4 ziek zijn, dan zien we dat die vakjes precies een over 45° gedraaid vierkant vormen (zie hieronder). Op dag 1 is er $1^2 = 1$ vakje ziek, op dag 2 zijn het er $2^2 = 4$, dan $3^2 = 9$ en dan $4^2 = 16$. Op dag 5 zijn dezelfde vakjes ziek als op dag 3 met nog een hele rand nieuwe zieke vakjes daaromheen, zodat het een 5×5-vierkant wordt. Dit patroon zet zich voort en op dag 100 zijn er dus $100^2 = 10000$ vakjes ziek.



dag 1 dag 2 dag 3 dag 4

A3. D) 5π In de figuur rechts zien we dat de grote cirkel bestaat uit vijf kleine cirkels en vier donkergrijze gebieden. De grote cirkel heeft oppervlakte 9π en elk van de kleine cirkels heeft oppervlakte π, dus hebben de vier donkergrijze gebieden samen een oppervlakte van $9\pi - 5\pi = 4\pi$. Omdat de vier donkergrijze gebieden gelijke oppervlaktes hebben, heeft elk donkergrijs gebied dus oppervlakte π. We concluderen dat de totale oppervlakte van het plaatje in de opgave gelijk is aan 5π (twee kleine cirkels en drie donkergrijze gebieden samen).



A4. B) 7 De dertien veelvouden zijn: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 en 98.

In de veelvouden 70 en 77 komen alleen de cijfers 0 en 7 voor. Bovendien zijn het de enige veelvouden met een 0 of 7. Met 70 of 77 kan de keten dus hooguit lengte 2 hebben.

Op dezelfde manier zijn de veelvouden 35, 56 en 63 de enige veelvouden met een 3, 5 of 6. Met die veelvouden kan een keten dus hooguit lengte 3 hebben.

Een keten van lengte 4 of meer kan dus alleen de veelvouden 14, 21, 28, 42, 49, 84, 91 en 98 bevatten. We kijken eerst of er een keten mogelijk is die alle acht overgebleven veelvouden gebruikt. Omdat twee van de veelvouden eindigen op een 1 en er slechts één met een 1 begint, moet het laatste getal van de keten dus op een 1 eindigen. Er zijn echter ook twee veelvouden die op een 8 eindigen en slechts één veelvoud dat met een 8 begint. Het laatste getal in de keten moet dus ook op een 8 eindigen. Het laatste getal kan niet op zowel een 1 als een 8 eindigen, dus we kunnen geen keten maken van lengte 8.

Er is wel een keten van lengte 7, namelijk 21 – 14 – 42 – 28 – 84 – 49 – 91.

A5. D) 20 De eerste eis zegt dat het aantal zwarte vakjes in een kolom niet gelijk kan zijn aan het aantal zwarte vakjes in een kolom direct rechts (of links) daarvan. Uit de tweede eis volgt dat het aantal zwarte vakjes in een kolom ook niet gelijk kan zijn aan het aantal zwarte vakjes in de tweede kolom rechts (of links) daarvan. De aantallen zwarte vakjes in de eerste drie kolommen moeten dus verschillend zijn, en als we die eenmaal weten, weten we ook de aantallen zwarte vakjes in de laatste twee kolommen.

De mogelijkheden voor de aantallen zwarte vakjes in de vijf kolommen zijn:

$$0-1-2-0-1, \qquad 0-2-1-0-2, \qquad 1-0-2-1-0,$$

$$1-2-0-1-2, \qquad 2-0-1-2-0, \qquad 2-1-0-2-1.$$

Als er 0 of 2 zwarte vakjes in een kolom moeten staan, dan kan dat maar op 1 manier. Als er 1 zwart vakje in een kolom moet komen te staan, dan kan dat op 2 manieren.

De combinaties $0-2-1-0-2$ en $2-0-1-2-0$ kunnen dus elk op 2 manieren voorkomen en de andere vier combinaties kunnen elk op $2\times 2 = 4$ manieren voorkomen. In totaal zijn er dus $2\times 2 + 4\times 4 = 20$ mogelijkheden.

A6. E) 35 Je kunt 35 krijgen als $5\times(4+3) : (2-1)$. Dat is meteen het grootste getal in de antwoordopties en daarmee het juiste antwoord.

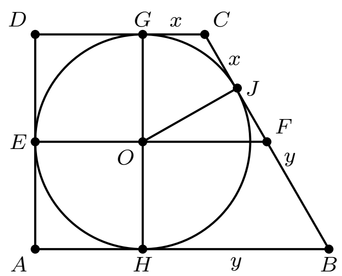
A7. D) Isa heeft een mountainbike. Stel dat Isa geen mountainbike heeft. Dan moet de andere uitspraak van Isa wel waar zijn en heeft Nick de elektrische fiets. Dus Isa heeft noch de mountainbike, noch de elektrische fiets, dus heeft ze de racefiets. Omdat Nick de elektrische fiets heeft, is de eerste uitspraak van Agatha onwaar; de tweede is dus wel waar, waarmee we nu dus zelfs de kleur van Isa's racefiets weten: blauw. Maar dan zijn beide uitspraken van Nick onwaar; tegenspraak. Dus Isa moet wel de mountainbike hebben. Dus D) is in ieder geval waar.

In de volgende twee situaties is er precies één uitspraak waar van elk van de drie fietsers. Dit zijn dus twee situaties die kunnen voorkomen, waaruit blijkt dat de beweringen in A), B), C) en E) niet in alle mogelijke situaties waar zijn.

Agatha	elektrische fiets	groen
Isa	mountainbike	zwart
Nick	racefiets	blauw

Agatha	elektrische fiets	zwart
Isa	mountainbike	groen
Nick	racefiets	blauw

A8. D) 22 De raakpunten van CD, AB en BC aan de cirkel noemen we G, H en J. Het middelpunt van de cirkel noemen we O. De lengte van CG is x en de lengte van BH is y.



Omdat vierhoek $OJCG$ spiegelsymmetrisch is (in OC), zien we dat $|CJ| = x$. Op dezelfde manier is $OHBJ$ spiegelsymmetrisch en vinden we $|BJ| = y$. We zien dus dat $x + y = 24$.

De lengte van AB is gelijk aan $|AH| + |BH| = 10 + y$ en de lengte van CD is gelijk aan $|CG| + |DG| = 10 + x$. Omdat EF precies halverwege ligt in het trapezium $ABCD$, is de lengte van EF precies het gemiddelde van de lengte van AB en de lengte van CD. We zien dus dat $|EF| = 10 + \frac{1}{2}(x + y) = 22$.

B1. 45 minuten Met het tempo van route B doet Maurits er een uur over om 2 kilometer meer te fietsen dan met het tempo van route A. Hij doet er dus $\frac{1{,}5}{2} \times 60 = 45$ minuten over om met het snellere tempo 1,5 kilometer meer te fietsen. Zijn fietstocht naar school duurt dus 45 minuten.

B2. 1836 Het getal n moet bestaan uit vier cijfers. Immers, een getal van hoogstens drie cijfers plus een fragment geeft hoogstens $999 + 99 < 2019$ en een getal van vijf cijfers is zelf al groter dan 2019. We schrijven $n = abcd$ waarbij a, b, c en d de cijfers zijn van n. Omdat we willen dat n zo klein mogelijk is, moeten we een fragment van drie cijfers kiezen (indien mogelijk). We willen dus dat $abcd + bcd = 2019$ of $abcd + abc = 2019$. Omdat $abcd + bcd$ altijd een *even* getal geeft, valt dat geval af. We hebben dus

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & & \\ & a & b & c & & + \\ \hline 2 & 0 & 1 & 9 & & \end{array}$$

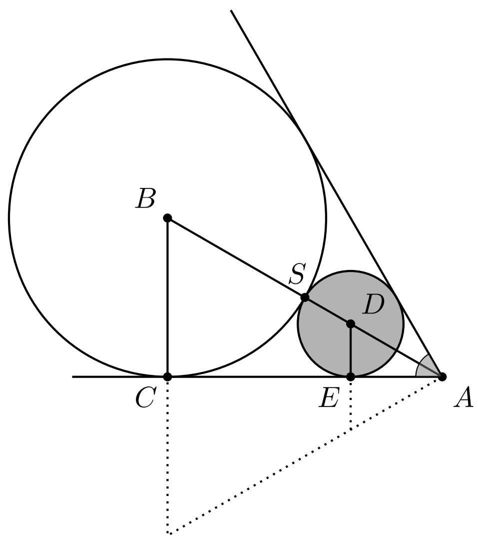
Merk op dat we in de optelling op sommige plaatsen mogelijk één moeten onthouden en meenemen bij het cijfer links ervan. Dat gebeurt niet in de positie helemaal rechts: $c + d$ is gelijk aan 9 en niet aan 19.

We bekijken de cijfers in de optelling van links naar rechts. We zien dat $a = 1$ of $a = 2$. Het geval $a = 2$ valt af omdat anders $b + a = 0$ zou gelden in de positie ernaast. We hebben dus $a = 1$ en er moet gelden dat $b + a = 9$ of $b + a = 10$, oftewel dat $b = 8$ of $b = 9$. Het tweede geval valt af omdat dan in de positie ernaast zou gelden dat $c + b = 1$. We zien dus dat $b = 8$ en dat $c + b = 11$. Er volgt dat $c = 3$. Kijken we ten slotte naar de positie helemaal rechts, dan vinden we $d + c = 9$, dus $d = 6$. We vinden zo $n = 1836$ en dat is inderdaad een oplossing want $1836 + 183 = 2019$.

B3. $\frac{10}{9}$ In de figuur zie je een hoek van de gelijkzijdige driehoek vergroot getekend. De grote cirkel is niet getekend, alleen de tweede en derde cirkel. De twee zijden van de driehoek die in hoekpunt A samenkomen maken een hoek van 60 graden. We zullen laten zien dat de straal van de tweede cirkel driemaal zo groot is als de straal van de derde cirkel: $|BC| = 3|DE|$.

We bekijken eerst driehoek ABC. Hoek BAC is $\frac{60}{2} = 30$ graden, hoek ACB is 90 graden en hoek ABC is dus $180 - 30 - 90 = 60$ graden. Dit betekent dat driehoek ABC en zijn gespiegelde in lijn AC samen een gelijkzijdige driehoek vormen. Er volgt dat $|AB| = 2|BC|$. Hetzelfde geldt voor driehoek ADE en zo vinden we dat $|AD| = 2|DE|$. Bekijk nu lijnstuk AS. We hebben $|AS| = |AB| - |BS| = 2|BC| - |BC| = |BC|$. Aan de andere kant hebben we ook $|AS| = |SD| + |AD| = |DE| + 2|DE| = 3|DE|$. We zien dus dat inderdaad geldt: $|BC| = 3|DE|$.

We kunnen precies dezelfde redenering gebruiken voor de eerste en de tweede cirkel. We zien dan dat de straal van de eerste cirkel driemaal zo groot is als de straal van de tweede cirkel. De straal van de derde cirkel is dus gelijk aan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{9}$.



B4. 12 Er zijn 9 letters, namelijk A tot en met I. Het aantal mogelijke tweetallen letters is $\frac{9\times 8}{2} = 36$. Immers, elk van de 9 letters kan met 8 andere letters in een tweetal, maar zo tellen we elk tweetal dubbel (tweetal AE is gelijk aan tweetal EA).

Elk kaartje heeft drie verschillende letters die samen 3 tweetallen vormen. Er zijn dus zeker minstens $\frac{36}{3} = 12$ kaartjes nodig om alle tweetallen zo een keer te krijgen. Dat het ook echt met 12 kaartjes kan, volgt door de volgende drietallen te nemen:

ABC	DEF	GHI
ADG	BEH	CFI
AEI	CDH	BFG
AFH	BDI	CEG

De drietallen zijn ook uitgebeeld in de figuur. De twaalf drietallen worden gevormd door de drie horizontale lijnen, de drie verticale lijnen, de twee diagonalen en de vier kromme lijnen. Het is makkelijk na te gaan dat elk tweetal letters inderdaad samen op een van de lijnen ligt.