Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 27 januari 2017

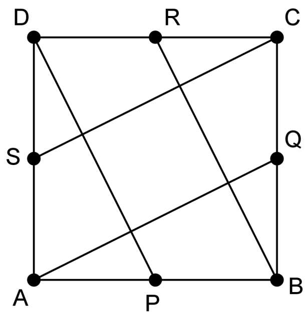
Uitwerking uitsmijter

Een vierkant $ABCD$ heeft zijden van lengte 6. Op respectievelijk zijden AB, BC, CD en DA liggen de punten P, Q, R en S. We bekijken de vierhoek ingesloten door de vier lijnen AQ, BR, CS en DP.

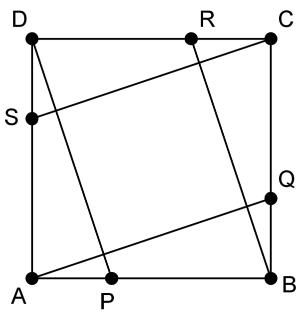
(a) Stel $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = 3$. Bereken de oppervlakte van de ingesloten vierhoek.

(b) Stel $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = 2$. Bereken de oppervlakte van de ingesloten vierhoek.

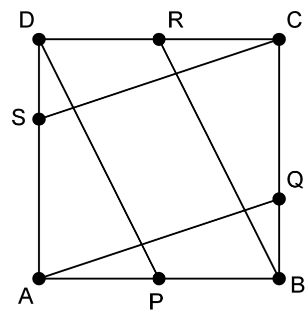
(c) Stel $|AP| = |CR| = 3$ en $|BQ| = |DS| = 2$. Bereken de oppervlakte van de ingesloten vierhoek.



(a)



(b)



(c)

Antwoorden.

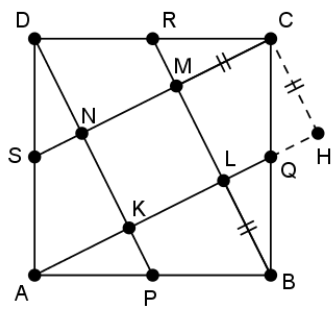
(a) $\dfrac{36}{5} = 7\dfrac{1}{5}$

(b) $\dfrac{72}{5} = 14\dfrac{2}{5}$

(c) $\dfrac{72}{7} = 10\dfrac{2}{7}$

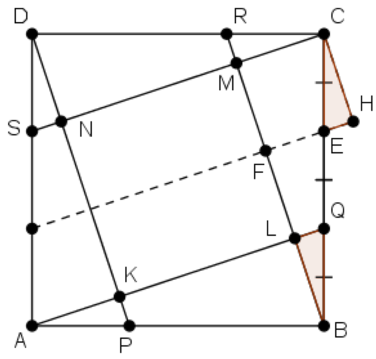
Uitwerking.
We noemen de hoekpunten van de ingesloten vierhoek K, L, M en N. Zie de figuren hieronder.

(a)
- We draaien driehoekje BQL om draaipunt Q over 180°. Het past dan precies aan vierhoek $CMLQ$ en samen vormen ze een vierkant $CMLH$. (Immers: als je het hele oorspronkelijke plaatje 90° draait, krijg je weer precies hetzelfde plaatje. Daarom staan de schuine lijnen loodrecht op elkaar en is $|CM| = |BL| = |CH|$. De nieuwe vierhoek heeft dus rechte hoeken en twee zijden naast elkaar die even lang zijn en is daarmee een vierkant.)



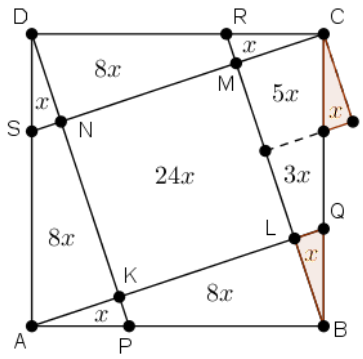
- Zo kunnen we ook de andere drie driehoekjes verplaatsen en houden we een figuur over met vijf precies even grote vierkanten.
- De oppervlakte van vierkant $KLMN$ is dus $\frac{1}{5}$ van de oppervlakte van het oorspronkelijke 6×6-vierkant en daarom gelijk aan $\frac{36}{5}$.

(b) • Door de middelste stippellijn te trekken, wordt de rechterzijde in drieën gedeeld. We draaien nu driehoekje BQL weer over 180° en verschuiven het naar boven zodat het tegen zijde EC aan komt te liggen; dan past het (net als bij onderdeel (a)) precies aan vierhoek $CMFE$ en vormt daarmee samen weer een vierkant.



• Aan de rechterkant hebben we drie gelijkvormige driehoeken $\triangle BQL$, $\triangle BEF$ en $\triangle BCM$ die zich verhouden als $1 : 2 : 3$. Hun oppervlaktes verhouden zich dus als $1 : 4 : 9$.

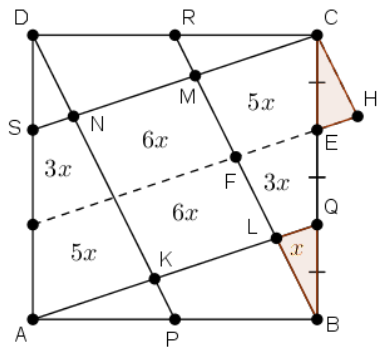
• We geven de oppervlakte van driehoekje BQL aan met x; dan liggen boven dit driehoekje twee vierhoeken met oppervlakte respectievelijk $4x - x = 3x$ en $9x - 4x = 5x$. Deze oppervlakte van in totaal $x + 3x + 5x = x + 8x$ zien we nog drie keer in het plaatje terug. De oppervlakte van het nieuw ontstane vierkant rechtsboven is nu $6x$.



• De zijde LM van vierkant $KLMN$ is twee keer zo groot als zijde FM van het nieuw ontstane vierkant rechtsboven; vierkant $KLMN$ heeft dus een oppervlakte van $4 \cdot 6x = 24x$.

• De oppervlakte van de hele figuur is nu $24x + 4 \cdot 9x = 60x$, dus vierkant $KLMN$ is $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ van de oppervlakte van het oorspronkelijke 6×6-vierkant. Deze is daarom gelijk aan $\frac{72}{5}$.

(c) • Door weer de middelste stippellijn te trekken, krijgen we net als bij onderdeel (b) aan de rechterkant drie gelijkvormige driehoeken die zich verhouden als $1 : 2 : 3$. Geven we de oppervlakte van driehoekje BQL weer aan met x, dan liggen boven dit driehoekje dus twee vierhoeken met oppervlakte respectievelijk $3x$ en $5x$.



• We draaien nu driehoekje BQL weer over 180° en verschuiven het naar boven zodat het tegen zijde EC aan komt te liggen. Dan past het precies aan vierhoek $CMFE$ en vormt daarmee samen een parallellogram met oppervlakte $6x$. (Immers: de overliggende zijden zijn evenwijdig. Merk op dat het nu geen vierkant meer is, omdat de lijnen niet meer loodrecht op elkaar staan.)

• Parallellogram $KLMN$ wordt door de stippellijn opgesplitst in precies twee parallellogrammen die elk even groot zijn als $CMFH$. De oppervlakte van parallellogram $KLMN$ is dus $12x$.

• Naast de twee stroken van $3x + 6x + 5x = 14x$ boven en onder de stippellijn, bestaat de hele figuur nog uit de twee grote driehoeken CDS (aan de bovenkant) en ABQ (aan de onderkant) die samen precies dezelfde oppervlakte hebben als elk van de stroken. (Plak de onderste driehoek maar vanaf de bovenkant aan de bovenste driehoek; dan krijg je precies weer zo'n strook.)

• De oppervlakte van de hele figuur is dus $3 \cdot 14x = 42x$, dus parallellogram $KLMN$ is $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$ van de oppervlakte van het oorspronkelijke 6×6-vierkant. Deze is daarom gelijk aan $\frac{72}{7}$.