Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade

Vervolgbundel met nieuwe opgaven uit 2014–2025

Roxy Ye

2026

Voorwoord

"The only way to learn mathematics is to do mathematics."
— Paul Halmos

Dit materiaal is ontwikkeld in het kader van het keuzevak *Oriëntatie op Onderwijs* van de bacheloropleiding Wiskunde aan de Universiteit Leiden. Het doel van deze bundel is om leerlingen te ondersteunen bij de voorbereiding op de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en tegelijkertijd te laten zien hoe veelzijdig en creatief wiskunde kan zijn.

Op de middelbare school heb ik zelf deelgenomen aan de Wiskunde Olympiade. Dat was voor mij een uitdagende en bijzondere ervaring, omdat de opgaven een ander soort wiskundig denken stimuleren dan de opgaven uit het reguliere curriculum. Deze ervaring heeft mij gemotiveerd om deze bundel samen te stellen, met als doel leerlingen op een toegankelijke manier kennis te laten maken met dit type wiskundig denken.

Er is veel oefenmateriaal beschikbaar voor de wedstrijd, maar dit bestaat vaak uit losse opgaven of volledige wedstrijdsets uit eerdere jaren. Daardoor kan het lastig zijn om overzicht te krijgen in de verschillende soorten vragen of om gericht te oefenen met specifieke vaardigheden. Daarnaast worden strategieën vaak besproken aan de hand van volledige uitwerkingen van opgaven.

Wat deze bundel onderscheidt van ander beschikbaar materiaal, is dat zij laat zien wat het toepassen van een strategie oplevert zonder de volledige oplossing van het probleem direct weg te geven. Hierdoor krijgt de lezer de ruimte om zelf verder na te denken. Op deze manier oefent de lezer met het uitproberen van verschillende strategieën en ligt de nadruk op de aanpak van een probleem, in plaats van uitsluitend op het eindantwoord.

De opzet van deze bundel is gebaseerd op *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade* (2014) van Birgit van Dalen en Quintijn Puite. Net als in dat boek bestaat het eerste deel uit theorie en opgaven, en het tweede deel uit uitwerkingen. Ook een groot deel van de theoretische uitleg is afkomstig van hun werk, met op enkele plaatsen aanvullingen. De opgaven in deze bundel zijn echter afkomstig uit olympiades van na 2014, zodat nieuw oefenmateriaal beschikbaar is dat nog niet in het oorspronkelijke boek voorkomt. Daarnaast wijkt onder andere de indeling van de opgaven af van de eerdere versie en is het aantal strategieën beperkter gehouden, zodat elke strategie uitgebreider kan worden behandeld.

Graag wil ik Birgit van Dalen en Quintijn Puite enorm bedanken voor het waardevolle materiaal dat als basis voor deze bundel heeft gediend.

Daarnaast wil ik Peter Kop hartelijk bedanken voor zijn waardevolle feedback, scherpe inzichten en betrokkenheid. Zijn inbreng heeft in belangrijke mate bijgedragen aan de kwaliteit van deze bundel.

De bundel is geschikt voor leerlingen die zich willen voorbereiden op de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade, maar ook voor iedereen die plezier heeft in puzzelen en wiskundig denken. Er is geen specifieke voorkennis nodig: nieuwsgierigheid en doorzettingsvermogen zijn belangrijker dan formules of trucjes.

Ik hoop dat dit materiaal je helpt om met vertrouwen deel te nemen aan de Wiskunde Olympiade en dat het laat zien hoe elegant, inventief en verrassend wiskunde kan zijn. Veel succes en vooral veel plezier!

Roxy Ye
Maart 2026

Inhoudsopgave

Inleiding

Wat is de Wiskunde Olympiade?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) is een jaarlijkse wedstrijd voor leerlingen van havo en vwo met interesse in wiskunde. Alle leerlingen uit klas 1 tot en met 5 kunnen deelnemen aan de eerste ronde, die ieder jaar in januari op school wordt afgenomen. Ongeveer achthonderd deelnemers gaan door naar de tweede ronde in maart. Zij worden ingedeeld in drie categorieën: onderbouw, klas 4 en klas 5. Voor elke categorie geldt een andere grens voor het aantal benodigde punten, hoewel de opgaven voor iedereen gelijk zijn. De beste ongeveer 130 leerlingen plaatsen zich uiteindelijk voor de finale in september. Vanuit deze finale worden de teams samengesteld die Nederland vertegenwoordigen bij internationale wiskundewedstrijden.

De eerste ronde bestaat uit een combinatie van acht meerkeuzevragen en vier vragen waarbij een exact getal als antwoord moet worden gegeven. Uitwerkingen of bewijzen hoeven hierbij niet te worden ingeleverd. Voor het maken van de opgaven krijg je in totaal twee uur de tijd. Meer informatie over de Wiskunde Olympiade is te vinden op de website: `https://www.wiskundeolympiade.nl/`.

Hoe werkt deze bundel?

Deze bundel bestaat uit drie delen: *Theorie en opgaven*, *Uitwerkingen* en *Wiskunde Olympiade 2026*.

In het eerste deel worden verschillende onderwerpen behandeld die regelmatig terugkeren in de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade. Elk hoofdstuk begint met een korte theoretische inleiding, gevolgd door passende voorbeelden, en wordt afgesloten met bijbehorende opgaven. De opgaven staan geordend op toenemende moeilijkheidsgraad. In de voorbeelden ligt de nadruk op strategieën en denkstappen die helpen om problemen gestructureerd aan te pakken, in plaats van op volledige uitwerkingen.

In het tweede deel zijn de uitwerkingen van de oefenopgaven opgenomen.

Het laatste deel bevat de opgaven van de Wiskunde Olympiade 2026. Hier zie je hoe de eerder behandelde strategieën in de praktijk worden toegepast en hoe verschillende typen opgaven samenkomen. Er is bewust voor gekozen om de volledige uitwerkingen van de voorbeelden en van de opgaven uit 2026 niet op te nemen. Het doel hiervan is om jou te stimuleren zelf te redeneren en niet te snel naar een uitgewerkte oplossing te grijpen.

Om het meeste uit deze bundel te halen, is het aan te raden om opgaven eerst zelfstandig te proberen. Lukt dat niet, pak dan de bijbehorende strategie er opnieuw bij en probeer te bedenken hoe je die kunt toepassen. Kom je er daarna nog niet uit, kijk dan pas naar de volledige uitwerking. Probeer vervolgens de oplossing nog eens zelf te reconstrueren en te bedenken welke stap voor jou het verschil maakte. Op die manier ontwikkel je niet alleen oplossingsvaardigheden, maar ook het wiskundig denkvermogen dat nodig is om nieuwe, onbekende problemen aan te pakken.

Deel I

Theorie en opgaven

Hoofdstuk 1: Kleine voorbeelden en patronen

"If you can't solve a problem, then there is an easier problem you can solve: find it."
— George Pólya

De tactiek van kleine voorbeelden en patronen kunnen we gebruiken bij opgaven waar je iets uit moet rekenen wat te veel werk is omdat de getallen te groot zijn.

Voorbeeld 1.1.
Het getal $a = 11\ldots111$ bestaat uit precies 2011 enen.
Wat is de rest bij deling van a door 37?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 11

Eerste ronde 2011, A6

Zo'n groot getal delen door 37 om te kijken wat de rest is, lukt niet. Maar in plaats van 2011 enen, kunnen we eerst eens kijken naar kleinere getallen die uit alleen enen bestaan.

Strategie

- Maak de opgave kleiner: vervang een groot getal (zoals hier 2011) in de opgave door kleinere getallen (bijvoorbeeld 1, 2, 3, 4, 5).
- Los de kleinere versies van de opgave op en kijk of je een patroon ziet. (Zo niet, bekijk nog meer gevallen.)
- Zet het patroon voort zodat je de echte opgave kunt oplossen.
- Merk op dat soms de voorbeelden met eenvoudige getallen al gegeven zijn. In dat geval kun je direct gaan zoeken naar het patroon. Soms moet je de eenvoudige situaties juist eerst zelf maken. Vergelijk bijvoorbeeld *Voorbeeld 1.1* met *Opgave 1.4*.

Zorg wel dat je jezelf echt overtuigt van het patroon: waarom gaat dit steeds op dezelfde manier door? Voor een echt wiskundig bewijs zou alleen het herkennen van het patroon niet voldoende zijn; je moet dan ook beargumenteren waarom het patroon zich op deze manier voortzet.

Probeer de strategie *Kleine voorbeelden en patronen.*
In plaats van het getal met 2011 enen door 37 te delen, delen we 1, 11, 111, 1111 enzovoorts door 37 en kijken we wat daar uitkomt.

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \times 37 + 1,\\
11 &= 0 \times 37 + 11,\\
111 &= 3 \times 37 + 0,\\
1111 &= 30 \times 37 + 1,\\
11111 &= 300 \times 37 + 11,\\
111111 &= 3003 \times 37 + 0.
\end{aligned}$$

Herken jij al een patroon? Overtuig jezelf ervan dat dit zich voortzet! Los nu de echte opgave op.

Voorbeeld 1.2.
Van welk van de volgende getallen is $2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 + 1$ het kwadraat?

A) $2021 \cdot 2023 - 1$ B) $2021 \cdot 2024 - 1$ C) $2022 \cdot 2024 - 1$ D) $2022 \cdot 2023 - 1$ E) $2023 \cdot 2024 - 1$

Eerste ronde 2025, A4

Probeer de strategie *Kleine voorbeelden en patronen.*
Probeer eerst kleine gevallen:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 &= 25 = 5^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2, \\
2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 &= 121 = 11^2 = (3 \cdot 4 - 1)^2, \\
3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 &= 361 = 19^2 = (4 \cdot 5 - 1)^2, \\
4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 &= 841 = 29^2 = (5 \cdot 6 - 1)^2.
\end{aligned}$$

Wat valt op aan deze uitkomsten? Welke twee getallen spelen steeds een rol in het kwadraat?

In alle gevallen lijkt te gelden:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = \big((n+1)(n+2) - 1\big)^2.$$

Ga dit na en los de opgave verder op.

Verdieping.
We onderzoeken nu of dit patroon ook in het grote geval klopt.

Merk op dat er geldt: $2021 \cdot 2024 = (2022 - 1)(2023 + 1)$. Werk dit product nu zelf uit en probeer het resultaat te schrijven in termen van $N = 2022 \cdot 2023$. Lukt het daarmee om tot het eindantwoord te komen?

Opgaven

Opgave 1.1.
Op een 2019×2019-schaakbord heerst een besmettelijke ziekte. Elke dag zijn sommige vakjes van het schaakbord ziek en is de rest gezond. Een gezond vakje dat grenst (met een zijde) aan een ziek vakje wordt zelf de volgende dag ziek. Een ziek vakje is altijd de volgende dag weer gezond. Een gezond vakje dat eerder al een keer ziek is geweest, kan opnieuw ziek worden (als hij besmet wordt door een aangrenzend ziek vakje). Op dag 1 is alleen het middelste vakje ziek.
Hoeveel vakjes zijn er ziek op dag 100?

A) 200 B) 298 C) 396 D) 9999 E) 10000

Eerste ronde 2019, A2

Opgave 1.2.
We rangschikken de positieve oneven getallen als volgt:

	kolom 1	kolom 2	kolom 3	kolom 4	kolom 5	kolom 6	⋮
rij 1	1	3	11	13	29	31	...
rij 2	5	9	15	27	33	...	
rij 3	7	17	25	35	...		
rij 4	19	23	37	...			
rij 5	21	39	...				
rij 6	41	...					
...	...						

We kunnen van elk oneven getal zeggen in welke rij en kolom het staat. Het getal 35 staat bijvoorbeeld in rij 3 en kolom 4.
Welk getal staat er in rij 22 en kolom 24?

A) 2021 B) 2023 C) 2025 D) 2027 E) 2029

Eerste ronde 2021, A8

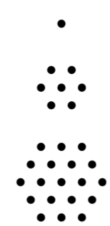
Opgave 1.3.
Montasser maakt een rij getallen. De eerste twee getallen zijn 6 en 15. Hij maakt steeds het volgende getal in de rij door het laatste getal te delen door het getal daarvoor en het resultaat te vermenigvuldigen met 2. Zo is het derde getal in de rij dus $\frac{15}{6} \cdot 2 = 5$ en het vierde getal is $\frac{5}{15} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.
Wat is het honderdste getal in de rij?

A) 15 B) 5 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{15}$ E) $\frac{4}{5}$

Eerste ronde 2024, A3

Opgave 1.4.
We bekijken gestipte zeshoeken met 1, 2, 3, . . . stippen aan één zijde, zie ook hiernaast. Het aantal stippen in een dergelijke zeshoek heet een *zeshoeksgetal*. Het eerste zeshoeksgetal is 1, het tweede is 7 en het derde is 19.
Welk van de onderstaande getallen is ook een zeshoeksgetal?

A) 81 B) 128 C) 144 D) 169 E) 187



Eerste ronde 2017, A2

Opgave 1.5.
Een 100×100-bord wordt gevuld met getallen. In het vakje helemaal linksonder komt een 0. Vanuit elk ander vakje V bekijken we een route vanaf het vakje linksonder naar vakje V, waarbij je alleen stappen naar rechts en naar boven mag nemen, niet diagonaal. Als je alle getallen die je onderweg tegenkomt optelt, en daar vervolgens nog 1 bij optelt voor elke stap die je hebt genomen, dan krijg je het getal dat in vakje V staat. Hiernaast is een deel van het bord al ingevuld. Het getal 15 is bijvoorbeeld verkregen uit $(0 + 1 + 3 + 7) + 4 = 15$.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	7	15	$\cdots$
1	3	7	$\cdots$
0	1	3	$\cdots$

Wat is het laatste cijfer van het getal in het vakje helemaal rechtsboven van het 100×100-bord?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Eerste ronde 2017, A6

Opgave 1.6.
Bij een quiz beantwoord je 10 vragen. Elke vraag is moeilijk of makkelijk. Voor een moeilijke vraag krijg je 5 punten als je hem goed hebt en -1 punt als je hem fout hebt; voor een makkelijke vraag krijg je 3 punten als je hem goed hebt en -1 punt als je hem fout hebt. Bovendien geldt: als je een vraag goed hebt, is de volgende een moeilijke; als je een vraag fout hebt, is de volgende een makkelijke. Je begint met een moeilijke vraag.
Hoeveel verschillende eindscores zijn er mogelijk na 10 vragen?

Eerste ronde 2017, B4

Hoofdstuk 2: Durf te proberen

> *"You never fail until you stop trying."*
> *— Albert Einstein*

Soms zie je niet direct hoe een opgave in elkaar zit of hoe je het zou kunnen aanpakken. In hoofdstuk 1 heb je al gezien dat het kan helpen om een kleiner geval van de opgave uit te proberen of om een stuk van een rij getallen verder uit te rekenen. Ook bij andere soorten opgaven helpt het vaak om gewoon wat te proberen. Wat precies, hangt erg van de opgave zelf af.

Voorbeeld 2.1.
Van de getallen 1 tot en met 100 wil Jaap er zoveel mogelijk (verschillende) op een blaadje papier schrijven. Er mogen geen twee getallen op het blaadje komen die bij elkaar opgeteld 125 zijn. Hoeveel getallen kan hij hoogstens op het blaadje schrijven?

A) 50 B) 61 C) 62 D) 63 E) 64

Eerste ronde 2011, A5

Wacht niet tot je precies ziet hoe een opgave werkt, maar begin gewoon ergens. Dat kan door een getallenvoorbeeld uit te rekenen, een antwoord te gokken en te controleren of het kan, een schema te maken of een tekening te schetsen. Ook als een poging niet meteen werkt, levert het bijna altijd nieuwe informatie op die je verder helpt. Het is belangrijk dat je durft te proberen!

Strategie

- Kies een antwoord uit de vijf mogelijkheden en controleer of dat antwoord kan.
- Moet je een zo groot mogelijke verzameling getallen maken met een bepaalde eigenschap? Begin dan gewoon met een paar willekeurige getallen en probeer er zoveel mogelijk toe te voegen.
- Zijn er rekenregels gegeven, waarvan je eigenlijk geen idee hebt wat ze nu precies betekenen? Stop er dan een paar concrete getallen in en kijk wat er gebeurt.
- Moet je een ingewikkeld getal of object vinden dat aan allerlei eisen moet voldoen? Probeer dan eerst iets te vinden wat al aan een deel van die eisen voldoet of wat er al een beetje op lijkt.
- Op zo'n manier krijg je vanzelf gevoel voor wat er goed werkt en wat er niet goed werkt. Staren naar een opgave werkt meestal niet; dingen proberen vaak wel!

Probeer de strategie *Durf te proberen.*
Lekker gaan proberen betekent in dit geval: schrijf maar wat getallen op en kijk of je tegen het probleem aanloopt dat er twee samen 125 zijn. Dus bijvoorbeeld: 1, 41, 27, 67, 98. Nu gaat het mis, want $98 + 27 = 125$. Dus blijkbaar mogen 98 en 27 niet tegelijkertijd. Zo kom je op het idee dat je heel veel paren getallen kunt maken die niet tegelijkertijd mogen voorkomen. De getallen 25 tot en met 100 kun je opdelen in paren die samen steeds optellen tot 125: $25 + 100 = 125$, $26 + 99 = 125$, en zo verder. Kan jij bedenken hoeveel getallen Jaap dus hoogstens op kan schrijven?

Voorbeeld 2.2.
In een speelgoedwinkel zijn aan het begin van de dag 20 stickervellen (0,30 euro per stuk), 18 voetballen (3 euro per stuk), 5 knuffelberen (5 euro per stuk) en 8 waterpistolen (15 euro per stuk) op voorraad. De nieuwe kassamedewerker maakt een rommeltje van de administratie en rapporteert aan het eind van de dag over de verkoop van deze vier artikelen alleen het totaalbedrag van 75,80 euro en dat er minder voetballen zijn verkocht dan elk ander artikel.
Hoeveel knuffelberen zijn er verkocht?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Eerste ronde 2023, A2

Probeer de strategie *Durf te proberen.*
Omdat drie van de vier artikelen een prijs in hele euro's hebben, moeten er van de stickervellen ofwel 6 verkocht zijn (voor 1,80 euro) ofwel 16 (voor 4,80 euro). Meer kan niet, omdat er maar 20 op voorraad waren. Voor de andere drie artikelen is er dus 74 of 71 euro over. Welke van de twee het is, weten we niet. Dus we gaan proberen!

Neem eerst aan dat er 74 euro over is. Omdat de knuffelberen en waterpistolen een veelvoud van 5 euro kosten, moeten er van de voetballen 3 verkocht zijn (nog 65 euro over) of een veelvoud van 5 extra. Maar 8 voetballen kan niet, want dan moeten er meer dan 8 knuffelberen verkocht zijn en zoveel waren er niet op voorraad. Dus het zijn er 3. Er moeten dan minstens 4 waterpistolen verkocht zijn en minstens 4 knuffelberen, maar dat is samen meer dan 65 euro. Dus dit kan niet.

Probeer nu zelf 71 euro.

Voorbeeld 2.3.
Lydia schrijft achter elkaar een aantal getallen van één cijfer op het krijtbord en wil ze allemaal bij elkaar optellen. Dat doet ze als volgt: eerst telt ze de eerste twee getallen bij elkaar op, vervolgens telt ze het resultaat op bij het derde getal, enzovoorts, totdat ze alle getallen heeft opgeteld. Na elke optelling schrijft Lydia het (tussen)antwoord op het bord. Als Lydia bijvoorbeeld begint met 3, 9, 5 dan staan er aan het eind de getallen 3, 9, 5, 12, 17 op het bord (want $12 = 3 + 9$ en $17 = 12 + 5$): dat zijn de cijfers 1, 2, 3, 5, 7 en 9. Lydia wil dat als ze klaar is alle cijfers 1 t/m 9 minstens één keer op het krijtbord voorkomen. Bovendien wil ze beginnen met zo min mogelijk getallen.
Geef een zo kort mogelijk rijtje getallen waarmee Lydia zou kunnen beginnen.

Eerste ronde 2025, B4

Probeer de strategie *Durf te proberen.*
Stel dat Lydia met 3 getallen begint, bijvoorbeeld a, b, c. Dan komen er nog 2 tussenantwoorden bij: $a + b$ en $(a + b) + c$. Er staan dus in totaal 5 getallen op het bord.

De eerste drie zijn eencijferig, dus dat zijn al 3 cijfers. De twee tussenantwoorden zijn hooguit tweecijferig, dus dat zijn samen hooguit 4 cijfers. Dus staan er in totaal hooguit $3 + 4 = 7$ cijfers op het bord. Maar Lydia wil alle cijfers 1 t/m 9 laten voorkomen: dat zijn 9 verschillende cijfers. Met hooguit 7 cijfers kan dat niet. Dus Lydia heeft minstens 4 begingetallen nodig.

Als Lydia met 4 getallen begint, komen er nog 3 tussenantwoorden bij. Er staan dan 7 getallen op het bord: $a,\ b,\ c,\ d,\ a{+}b,\ a{+}b{+}c,\ a{+}b{+}c{+}d.$

Nu gaan we proberen:

- Kies vier eencijferige getallen.
- Reken de drie tussenantwoorden uit.
- Schrijf alle cijfers die je ziet in een lijst en kijk welke cijfers nog ontbreken.
- Pas je beginrijtje aan en probeer opnieuw.

Voorbeeld van hoe zo'n probeersessie eruit kan zien:

Probeer het rijtje 4, 6, 8, 5. Dan komen de tussenantwoorden: $4+6 = 10$, $10+8 = 18$, $18+5 = 23$. Dus op het bord staan de getallen: 4, 6, 8, 5, 10, 18, 23. Daarin komen de volgende cijfers voor: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. We missen nog de cijfers 7 en 9.

We gebruiken deze informatie om onze volgende poging gerichter te maken. Omdat het cijfer 7 nergens voorkomt, willen we graag een tussenantwoord krijgen waarin een 7 zit, bijvoorbeeld 17 of 27. Dat betekent dat we de begingetallen moeten veranderen.

We proberen nu het rijtje 4, 5, 8, 6. Dan krijgen we de volgende tussenantwoorden: $4 + 5 = 9$, $9 + 8 = 17$, $17 + 6 = 23$. Dus op het bord staan de getallen: 4, 5, 8, 6, 9, 17, 23. Daarin komen de volgende cijfers voor: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dit zijn ze allemaal!

Omdat 3 begingetallen niet kunnen en 4 begingetallen wel, is 4 minimaal. Een zo kort mogelijk rijtje waarmee Lydia kan beginnen, is bijvoorbeeld:

$$\boxed{4,\ 5,\ 8,\ 6}$$

Dit voorbeeld laat zien dat proberen vaak betekent: eerst gewoon iets uitproberen, kijken wat er ontbreekt, en je aanpak stap voor stap aanpassen. Kan jij nu zelf een ander rijtje vinden, of ze allemaal? Tip: we missen nog zeven rijtjes.

Opgaven

Opgave 2.1.
We noemen een positief geheel getal *kwadraardig* als elke twee cijfers die naast elkaar staan in het getal, een kwadraat vormen. Het getal 364 is bijvoorbeeld kwadraardig, want zowel 36 als 64 is een kwadraat.
Hoeveel cijfers heeft het grootste kwadraardige getal?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Eerste ronde 2024, A1

Opgave 2.2.
Als je de cijfers van het getal 2022 bij elkaar optelt, krijg je 6.
Hoeveel getallen van 4 cijfers (inclusief 2022 zelf) zijn er waarbij je, als je de cijfers bij elkaar optelt, 6 krijgt? De getallen mogen niet met een 0 beginnen.

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 56

Eerste ronde 2022, A4

Opgave 2.3.
Op het krijtbord staat het getal 1. Een *zet* bestaat eruit het getal op het bord weg te vegen en te vervangen door het dubbele van het getal of door het getal dat één kleiner is. Het getal 1 mag bijvoorbeeld vervangen worden door 2 (het dubbele) of 0 (één kleiner), en als het getal 5 op het bord staat, mag je dat vervangen door 10 of 4.
Wat is het minimale aantal zetten dat nodig is om het getal 2021 op het bord te schrijven?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Eerste ronde 2021, A5

Opgave 2.4.
De klas van Floor bestaat uit 16 leerlingen, inclusief Floor zelf. Alle leerlingen hebben een toets gemaakt met vier vragen. Iedere vraag was een (positief) geheel aantal punten waard. Elke vraag is volledig goed of volledig fout gerekend; er zijn geen deelpunten gegeven. De vraag waarmee de meeste punten te verdienen waren, was precies 4 punten meer waard dan de vraag die de minste punten waard was. Alle leerlingen behaalden een verschillende score; Floor had zelf alles goed.
Hoeveel punten heeft Floor minstens gescoord?

Eerste ronde 2024, B2

Opgave 2.5.
Een positief geheel getal a bestaat uit vier cijfers, waarvan er drie gelijk aan elkaar zijn. Het kwadraat van a bestaat uit zeven cijfers, die allemaal verschillend zijn. Getal b ontstaat door getal a van achteren naar voren te lezen. Het blijkt dat getal b groter is dan a. Daarnaast blijkt dat b^2 precies gelijk is aan a^2 van achteren naar voren gelezen.
Vind alle mogelijkheden voor a.

Eerste ronde 2023, B4

Hoofdstuk 3: Letters invoeren en vergelijkingen

Bij veel problemen helpt het om een letter in te voeren voor iets dat je nog niet weet, maar waarmee je wel graag wilt rekenen. Vaak krijg je op deze manier meerdere vergelijkingen met variabelen (letters), die je moet combineren om tot de oplossing te komen.

Voorbeeld 3.1.
Frank heeft een la waarin allemaal losse sokken zitten. Er zitten 10 rode sokken in en de rest van de sokken is blauw. Hij gaat blind een aantal sokken uit de la pakken en wil daarna twee sokken van een bepaalde kleur hebben. Om zeker te zijn van minstens twee rode sokken moet hij twee keer zoveel sokken pakken als om zeker te zijn van minstens twee blauwe sokken.
Hoeveel sokken zitten er in totaal in de la?

A) 14 B) 18 C) 26 D) 32 E) 40

Eerste ronde 2012, A5

Een mogelijke aanpak is om de strategie *Durf te proberen* uit hoofdstuk 2 te gebruiken en alle opties langs te gaan. Maar je kunt het ook sneller oplossen door een letter (of letters) in te voeren.

Strategie

- Voer een letter in voor een onbekende die centraal staat in de opgave. Dat kan de lengte van een lijnstuk zijn, de grootte van een hoek of een bepaalde hoeveelheid die genoemd wordt in de opgave. Vaak is het handig om dat wat je moet uitrekenen juist een naam te geven.
- Druk zoveel mogelijk andere dingen uit in jouw letter.
- Probeer hiermee een vergelijking af te leiden voor jouw letter, waarmee je hem kunt uitrekenen.
- Soms is het nodig om meer dan één letter in te voeren. Maar wees wel zuinig met je letters: als je vijf verschillende letters invoert voor alles wat je nog niet weet, zie je door de bomen (letters) het bos niet meer.
- Combineer twee vergelijkingen om variabelen te laten wegvallen, bijvoorbeeld door ze op te tellen of van elkaar af te halen. Bijvoorbeeld $a + b = 3$ en $a + 5b = 10$ geeft door de eerste van de tweede af te halen dat $4b = 7$.
- Druk een variabele uit in een andere, zodat je de eerste overal kunt vervangen door de uitdrukking met de andere. Bijvoorbeeld $a + b = 3$ wordt $a = 3 - b$, waarna invullen in $a + 5b = 10$ leidt tot $3 - b + 5b = 10$.
- Ga niet direct de vergelijking oplossen of een variabele elimineren; dat levert vaak heel veel rekenwerk op. Soms zelfs zoveel dat je de oplossing niet rond krijgt.
- Ga wel spelen met de gegeven uitdrukking. Haal eens wat termen naar een andere kant, zet links en rechts de breuken op z'n kop, deel links en rechts door hetzelfde, etc. Hoe mooier het wordt, hoe beter!
- De uitdrukking $a^2 - b^2$ komt vaak voor en kun je handig ontbinden als $(a - b)(a + b)$. Dit heet een merkwaardig product.

Probeer de strategie *Letters invoeren en vergelijkingen.*
Het aantal blauwe sokken in de la noemen we b. Om zeker te weten dat hij twee blauwe sokken heeft, moet Frank 12 sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de tien rode sokken. Hoeveel sokken moet hij dan pakken om zeker te weten dat hij twee rode sokken heeft? Wat is het slechtste geval? Wat weten we vervolgens over de verhouding tussen dit geval en 12?

Alternatieve aanpak: Durf te proberen.
Als je er niet uitkomt, loont het om gewoon een getal te pakken en te proberen.

Stel dat er bijvoorbeeld in totaal 18 sokken in de la liggen. Daarvan zijn 10 rood, dus zijn er 8 blauwe sokken.

In het slechtste geval pakt Frank eerst alle 10 rode sokken. Daarna moet hij nog 2 sokken pakken om zeker te zijn van twee blauwe sokken. Dus hij moet in totaal 12 sokken pakken. Frank kan ook eerst alle 8 blauwe sokken pakken. Daarna moet hij nog 2 sokken pakken om zeker te zijn van twee rode sokken. Dus hij moet in totaal 10 sokken pakken.

Om zeker te zijn van twee blauwe sokken moet Frank dus 12 sokken pakken. Om zeker te zijn van twee rode sokken moet Frank 10 sokken pakken. Maar 10 is geen twee keer zoveel als 12. Dus bij 18 sokken voldoet de situatie niet aan de voorwaarde uit de opgave. En hoe zit het met de andere getallen?

Voorbeeld 3.2.
Laura bakt muffins en chocoladecake. Ze gebruikt daarbij precies evenveel suiker als bloem. In de muffins doet ze twee keer zoveel bloem als suiker. In de chocoladecake doet ze $\frac{5}{4}$ keer zoveel suiker als bloem.
Welk deel van de bloem gebruikt Laura voor de muffins?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

Eerste ronde 2025, A3

Probeer de strategie *Letters invoeren en vergelijkingen.*
Noem de hoeveelheid bloem die Laura gebruikt voor de muffins m, en de hoeveelheid bloem die Laura gebruikt voor de chocoladecake c. Er geldt dus dat $m + c = T$, waarbij T de totale hoeveelheid bloem (of suiker) is, want Laura gaat niets anders bakken. Verder gebruikt Laura $\frac{1}{2}m$ suiker voor de muffins en $\frac{5}{4}c$ suiker voor de chocoladecake. Wat moet er nu gelden als je weet dat ze evenveel suiker als bloem gebruikt?

Opgaven

Opgave 3.1.
Een eilandengroep bestaat uit een groot, een middelgroot en een klein eiland. De gezamenlijke oppervlakte van de drie eilanden is 23 km^2. Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland blijkt precies 1 km^2 meer te zijn dan de oppervlakte van het kleine eiland.
Hoeveel km^2 is de oppervlakte van het grote eiland?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Eerste ronde 2022, A1

Opgave 3.2.
In een klaslokaal staan stoelen en krukken. Op elke stoel en op elke kruk zit een kind. Elke stoel heeft 4 poten, elke kruk heeft 3 poten en elk kind heeft 2 benen. Bij elkaar geeft dit een totaal van 39 poten en benen.
Hoeveel stoelen staan er in de klas?

A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 9

Eerste ronde 2018, A1

Opgave 3.3.
Morgen gaat de familie Janssen met de auto op reis en ze hebben daarvoor een mooie route op het oog. De jongste van het gezin merkt op dat hun geplande tussenstop in Duitsland qua afstand precies halverwege de route ligt. Vader reageert: "Wanneer we morgen na 150 kilometer de grens over gaan, dan ligt onze tussenstop op nog maar een vijfde van de overgebleven route".
Hoeveel kilometer lang is de route van de familie Janssen?

Eerste ronde 2024, B1

Opgave 3.4.
Drie jaar geleden was Rosa's moeder precies vijfmaal zo oud als Rosa toen was. Rosa's moeder was toen precies even oud als Rosa's oma was op het moment dat Rosa's moeder werd geboren. Nu is Rosa's oma precies zeven keer zo oud als Rosa zelf.
Hoe oud is Rosa's moeder nu?

Eerste ronde 2018, B1

Opgave 3.5.
Annemiek en Bart hebben elk drie verschillende positieve gehele getallen op een briefje geschreven. Het blijkt dat er precies één getal is dat op allebei hun briefjes staat. Verder geldt dat als je twee verschillende getallen van Annemieks briefje neemt en die optelt, de uitkomst altijd een getal op Barts briefje is. Een van de drie getallen op het briefje van Annemiek is haar lievelingsgetal, en als je dat met 3 vermenigvuldigt, krijg je ook een getal van het briefje van Bart. Op Barts briefje staat zijn lievelingsgetal en dat is 25.
Wat is het lievelingsgetal van Annemiek?

Eerste ronde 2020, B3

Opgave 3.6.
In de tabel hieronder is elk van de drie rijen een kloppende rekensom (met $\div$ wordt deling aangegeven). Ook elk van de drie kolommen is (van boven naar beneden gelezen) een kloppende rekensom. In de tabel zijn echter de cijfers vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers en alle cijfers zijn ongelijk aan 0.

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & ADF & = & F \\ + & & - & & - \\ ADD & \div & GC & = & C \\ = & & = & & = \\ CEF & \div & GD & = & D \end{array}$$

Voor welk cijfer staat de letter E?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Eerste ronde 2020, A6

Opgave 3.7.
We hebben twee gehele getallen van twee cijfers, die niet beginnen met een 0. Als je deze getallen bij elkaar optelt, krijg je het getal S. Als je van beide getallen de twee cijfers verwisselt en deze twee nieuwe getallen bij elkaar optelt, dan krijg je $4S$.
Bepaal alle mogelijke paren van tweecijferige getallen waarvoor dit geldt. Geef in je antwoord duidelijk aan welke twee getallen bij elkaar horen.

Eerste ronde 2021, B1

Hoofdstuk 4: Meetkundig kijken

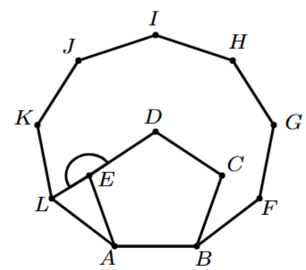
Zorg ervoor dat je de basisdefinities van de meetkunde goed kent.

Twee figuren zijn bijvoorbeeld gelijkvormig als de één een vergroting of verkleining van de ander is. In het geval van twee driehoeken geldt dat ze gelijkvormig zijn als ze twee paren hoeken hetzelfde hebben. Dit kom je onder andere tegen in zandloper- en snavelfiguren (met evenwijdigen lijnen).

Het is daarnaast heel nuttig om de stelling van Pythagoras scherp paraat te hebben, omdat je deze bij meetkundevragen heel vaak nodig hebt.

Voorbeeld 4.1.
Gegeven zijn een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ en een regelmatige negenhoek $ABFGHIJKL$ zoals in de afbeelding. *Let op: de figuur is niet op schaal.*
Hoe groot is de hoek bij E tussen de benen EL en ED?

A) 176° B) 177° C) 178° D) 179° E) 180°



Eerste ronde 2025, A7

Bij meetkunde-opgaven zijn de plaatjes vaak niet op schaal. (Dit wordt duidelijk aangegeven in de opdracht.) Laat je dus niet misleiden door hoe de plaatjes eruitzien.

Strategie

- Teken hulplijntjes en kijk of je onderdelen van bekende figuren herkent (zoals gelijkzijdige driehoek en cirkelsector).
- Schuif gebieden naar een andere plek, zodat ze samen met een ander gebied een bekende figuur vormen en de berekeningen makkelijker worden.
- Probeer gelijkvormige driehoeken in het plaatje te vinden.
- Gebruik een verhoudingstabel om met de gelijkvormigheid te rekenen. Bijvoorbeeld bij driehoeken ABC en XYZ waar hoeken A en X gelijk zijn en hoeken B en Y (en automatisch dan ook hoeken C en Z) krijg je

AB	BC	CA
XY	YZ	ZX

- Ook een hoogtelijn (of zwaartelijn) uit A en een hoogtelijn (of zwaartelijn) uit X hebben weer dezelfde verhouding.
- Als van twee gelijkvormige figuren de zijdelengtes van de één een factor f keer zo groot zijn als die van de ander, is de oppervlakte van die eerste figuur f^2 keer zo groot als de oppervlakte van de tweede.
- Herken een 30°-60°-90°-driehoek: deze ontstaat vaak door een gelijkzijdige driehoek te halveren. De zijden staan dan in de vaste verhouding $1 : \sqrt{3} : 2$.

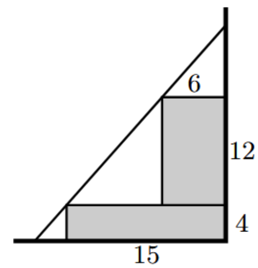
Probeer de strategie *Meetkundig kijken.*
Eerst kijken we naar de driehoek EAL. Omdat beide veelhoeken regelmatig zijn, geldt dat $|AE| = |AB| = |AL|$ en dus is EAL een gelijkbenige driehoek. De hoek bij A is gelijk aan de hoek van een regelmatige negenhoek min de hoek van een regelmatige vijfhoek.

Omdat je een n-hoek (voor $n \geq 3$) kan opdelen in $n-2$ driehoeken van elk $180°$, is de hoek van een regelmatige n-hoek gelijk aan $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Kan jij nu die hoek voor een vijfhoek en voor een negenhoek uitrekenen? Wat is dan de hoek bij A in de driehoek EAL? Hoe kunnen we daarmee de gevraagde hoek uitrekenen?

Opgaven

Opgave 4.1.
Een kist van 4 dm bij 15 dm ligt tegen de muur aan geschoven. Hierop staat een tweede kist, van 12 dm bij 6 dm. Een ladder raakt precies de grond, de twee kisten en de muur. Zie de weergave in de figuur (niet op schaal).
Hoeveel dm lang is de ladder?

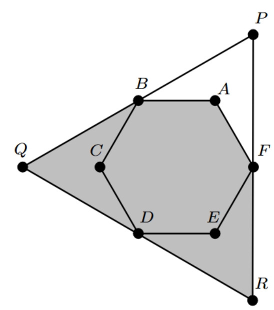
A) 30 B) $8\sqrt{15}$ C) 31 D) $22\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{3}$



Eerste ronde 2020, A4

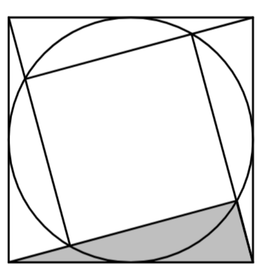
Opgave 4.2.
Gegeven is de gelijkzijdige driehoek PQR. Binnen deze driehoek is een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ getekend. Punten B, D en F zijn de middens van de zijden van driehoek PQR. De oppervlakte van de vijfhoek $QBAFR$ is gelijk aan 1.
Wat is de oppervlakte van driehoek PQR?

A) $\frac{11}{10}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$



Eerste ronde 2022, A5

Opgave 4.3.
In onderstaande figuur heeft het grote vierkant zijde 6. De cirkel raakt aan alle zijden van het grote vierkant. De vier driehoeken zijn precies gelijke rechthoekige driehoeken en staan direct tegen elkaar aan; het kleine vierkant dat zij insluiten, heeft zijn hoekpunten precies op de cirkel.

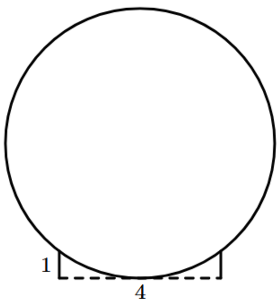


Wat is de oppervlakte van de grijze driehoek?

Eerste ronde 2022, B2

Opgave 4.4.
Bij de tafeltennisclub van Matthijs leggen ze hun pingpongballetjes altijd op een tafel met cilindervormige balhouders. Hiernaast zie je het zij-aanzicht van een pingpongballetje bovenop een balhouder. De onderkant van het balletje raakt precies de tafel. Het is bekend dat de balhouder 4 centimeter breed is en 1 centimeter hoog.
Hoeveel centimeter is de straal van het balletje? *Let op: het plaatje is niet op schaal.*

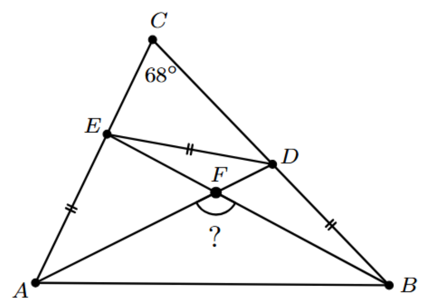
A) $2\frac{1}{3}$ B) $2\frac{1}{2}$ C) $2\frac{2}{3}$ D) $2\frac{5}{6}$ E) 3



Eerste ronde 2024, A6

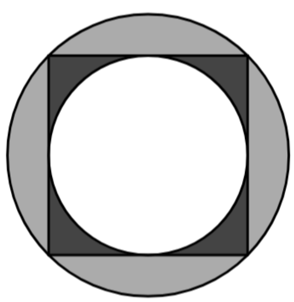
Opgave 4.5.
In driehoek ABC ligt op zijde BC een punt D en op zijde AC een punt E zodanig dat lijnstukken BD, DE en AE allemaal even lang zijn. Het punt F is het snijpunt van de lijnstukken AD en BE. Hoek C is 68°.
Hoe groot is hoek F in driehoek AFB?

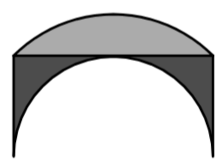
A) 120° B) 121° C) 122° D) 123° E) 124°



Eerste ronde 2021, A6

Opgave 4.6.
We bekijken een vierkant, de cirkel door de hoekpunten van het vierkant en de cirkel die raakt aan de vier zijden van het vierkant (zie de linkerfiguur). Het oppervlak van de ring tussen de twee cirkels is verdeeld in vier donkere stukken (binnen het vierkant) en vier lichte stukken (buiten het vierkant). De oppervlakte van het vierkant is 60.





Wat is de gezamelijke oppervlakte van twee donkere stukken en één licht stuk, zoals afgebeeld in de rechterfiguur?

Eerste ronde 2018, B3

Hoofdstuk 5: Logisch redeneren: wat weten we wel?

"Mathematics is the science which draws necessary conclusions."
— Benjamin Peirce

Olympiadeopgaven zijn vaak als doolhoven: waar er op school vaak een directe route naar de oplossing is, moet je bij een olympiadeopgave vaak een paar routes uitproberen en loop je soms een doodlopende gang in. Door logisch redeneren kun je snel bepaalde gangen afsluiten en de route naar de uitgang vinden.

Voorbeeld 5.1.
Bepaal alle getallen $ABCDE$ (bestaande uit de cijfers A, B, C, D en E) waarvoor $4 \times ABCDE = EDCBA$. Hierbij staan gelijke letters voor gelijke cijfers.

Eerste ronde 1998, A6

Hoewel deze opgave op het eerste gezicht ingewikkeld lijkt, kun je door rustig na te denken al veel informatie afleiden.

Strategie

- Probeer eerst met redeneren zoveel mogelijk dingen te achterhalen die je zeker weet.
- Als je daarna vastzit omdat er nog meerdere mogelijkheden ergens voor zijn, probeer dan één voor één deze mogelijkheden uit. Dus kan een getal nog 3 of 5 zijn, neem dan eerst even aan dat het 3 is en probeer er dan verder uit te komen. Daarna hetzelfde met 5.
- Misschien blijken sommige mogelijkheden na een paar redeneerstappen tóch niet te kunnen. Dat ontdek je pas door zo'n mogelijkheid juist wel goed te onderzoeken.
- Vraagt de opgave bijvoorbeeld om álle getallen met een bepaalde eigenschap te bepalen? Stop dan niet als je er door proberen eentje gevonden hebt, maar zorg dat je alle mogelijkheden uitgeprobeerd hebt.
- Gebruik tegenspraak (bewijs uit het ongerijmde). Neem aan dat iets waar is en kijk of dat leidt tot iets wat niet kan. Als dat zo is, weet je dat die aanname fout was. Dit is een krachtige techniek bij uitsluitingsproblemen.

Probeer de strategie *Logisch redeneren: wat weten we wel?*
Als het cijfer A heel groot zou zijn, zou $4 \times ABCDE$ uit meer dan vijf cijfers bestaan. Dit is al het geval als $A = 3$, want $4 \times 3 = 12$. Dus A moet 1 of 2 zijn. We proberen allebei deze mogelijkheden. Stel dat $A = 1$. Dan eindigt $4 \times E$ op een 1, maar dat kan niet, want $4 \times E$ is een even getal en moet dus op een even cijfer eindigen. Dus $A = 2$.

Nu is $4 \times A = 8$, dus $4 \times ABCDE$ begint met een 8 of een 9, afhankelijk van of er 1 moet worden 'onthouden'. Dus $E = 8$ of $E = 9$. Ook hier proberen we weer allebei de mogelijkheden. Stel dat $E = 9$. Dan eindigt $4 \times ABCDE$ op een 6, want $4 \times 9 = 36$. Maar het laatste cijfer is juist $A = 2$, dus dit kan niet. Dus $E = 8$.

Dat betekent ook dat er dus niet iets is 'onthouden', dus $4 \times BCDE$ bestaat uit vier cijfers. Dus $B = 1$ of $B = 2$. Als $B = 2$ zou $4 \times ABCDE = EDCBA$ eindigen op 22, maar de laatste twee cijfers van een viervoud moeten een viervoud zijn. De enige mogelijkheid is dus dat $B = 1$.

De vergelijking ziet er inmiddels als volgt uit: $4 \times 21CD8 = 8DC12$. Kan jij het nu afmaken? Wat moet er gelden voor D? En voor C?

Voorbeeld 5.2.
Vijf kabouters hebben elk een rode of blauwe muts op. De kabouters weten dat er in totaal drie rode en twee blauwe mutsen zijn. Kabouter A bekijkt de mutsen van kabouters C en D en kan daaruit niet afleiden welke kleur muts hij op heeft. Kabouter B bekijkt de mutsen van kabouters C en E en kan daaruit ook niet afleiden welke kleur muts hij op heeft. Ten slotte bekijkt kabouter C de mutsen van kabouters D en E en kan daaruit ook niet afleiden welke kleur muts hij op heeft.
Welk van de volgende uitspraken is zeker waar?

A) Minstens een van de kabouters A en B draagt een blauwe muts.
B) Minstens een van de kabouters A en B draagt een rode muts.
C) Kabouter C draagt een rode muts.
D) Minstens een van de kabouters D en E draagt een blauwe muts.
E) Kabouters D en E dragen allebei een rode muts.

Eerste ronde 2025, A1

Probeer de strategie *Logisch redeneren: wat weten we wel?*
Kijk naar kabouter A. Hij ziet de mutsen van C en D.

Stel je voor dat A twee blauwe mutsen ziet bij C en D. Wat zou A dan over zijn eigen muts kunnen concluderen?

Als C en D allebei blauw zouden zijn, dan zijn de 2 blauwe mutsen al "op". Dus kan A zelf niet blauw zijn, en zou hij zeker weten dat hij rood is. Maar in de opgave staat dat A dat *niet* kan afleiden.

Dus dit betekent dat C en D niet allebei blauw kunnen zijn.

En nu jij verder!

Opgaven

Opgave 5.1.
Voor gehele getallen a, b, c en d geldt dat het verschil tussen a en b gelijk is aan 2, het verschil tussen b en c gelijk aan 3 en het verschil tussen c en d gelijk aan 4.
Welk van de onderstaande waarden kan niet het verschil tussen a en d zijn?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Eerste ronde 2021, A1

Opgave 5.2.
Caitlin maakte in oktober elke dag een lange wandeling. Alleen op de 16 dagen dat er regen werd verwacht, nam ze een paraplu mee. Van de 31 dagen van oktober was de regenverwachting op precies 21 dagen correct. Gelukkig had Caitlin op de dagen dat het ging regenen altijd haar paraplu bij zich.
Hoeveel dagen heeft het niet geregend?

A) 6 B) 10 C) 16 D) 21 E) 25

Eerste ronde 2024, A2

Opgave 5.3.
In een toernooi met de vier teams A, B, C en D speelde elk team eenmaal tegen elk ander team in drie rondes van elk twee gelijktijdige wedstrijden. Geen enkel team won of verloor alle wedstrijden en geen enkele wedstrijd eindigde in een gelijkspel. Bekend is dat team A in de eerste en derde ronde won. Verder won team C in de eerste ronde en verloor team D in de tweede ronde. Vijf mensen doen na afloop uitspraken over het toernooi, maar slechts één van hen spreekt de waarheid.
Welke uitspraak is waar?

A) A en B speelden tegen elkaar in ronde 1 B) C won van B
C) A en D speelden tegen elkaar in ronde 3 D) D won van A
E) B en C speelden tegen elkaar in ronde 2

Eerste ronde 2022, A7

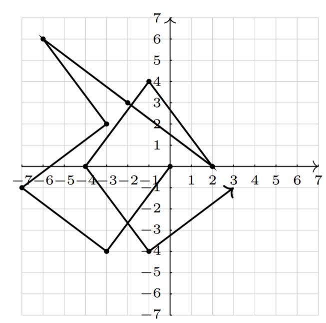
Opgave 5.4.
Aan een ronde tafel zitten 2023 personen. Elke persoon is ofwel een schurk ofwel een ridder. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. De eerste persoon zegt: “Er zit minstens één schurk aan deze tafel.” De persoon links ernaast zegt: “Er zit minstens één ridder aan deze tafel.” De derde zegt: “Er zitten minstens twee schurken aan deze tafel.” De vierde zegt: “Er zitten minstens twee ridders aan deze tafel.” Dit gaat zo verder, tot de laatste persoon aan tafel zegt: “Er zitten minstens 1012 schurken aan deze tafel.” De eerste persoon, die net al een uitspraak heeft gedaan, zegt nu: “Er zitten minstens 1012 ridders aan deze tafel.”
Hoeveel schurken zitten er aan de tafel?

A) 505 B) 506 C) 1011 D) 1012 E) 1507

Eerste ronde 2023, A6

Opgave 5.5.
Op een assenstelsel wordt een pad vanuit de oorsprong getekend door steeds een zet te doen. Een zet bestaat uit drie stappen horizontaal en tegelijk vier verticaal bewegen, of vier horizontaal en tegelijk drie verticaal. In de figuur is zo’n pad getekend, dat uit tien zetten bestaat.
Wat is het minimale aantal zetten dat je nodig hebt om vanuit de oorsprong het punt $(1, 0)$ te bereiken?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13



Eerste ronde 2025, A5

Opgave 5.6.
Xander tekent op een oneindig vel papier vijf punten en een aantal oneindig lange lijnen, op zo’n manier dat op elke lijn minstens twee van die punten liggen en dat de lijnen elkaar alleen snijden in punten die Xander heeft getekend.
Wat is het maximale aantal lijnen dat Xander getekend kan hebben?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Eerste ronde 2024, A5

Opgave 5.7.
Op een digitale klok lopen de tijdstippen van $00:00:00$ tot en met $23:59:59$. Het is mogelijk om vijf tijdstippen te maken die samen elk van de cijfers 0 t/m 9 precies driemaal gebruiken.
Wat is daarbij het grootst mogelijke tijdsverschil tussen het vroegste en het laatste tijdstip? *Het tijdsverschil tussen bijvoorbeeld* $08:34:16$ *en* $23:14:27$ *is* $14:40:11$.

Eerste ronde 2025, B2

Deel II

Uitwerkingen

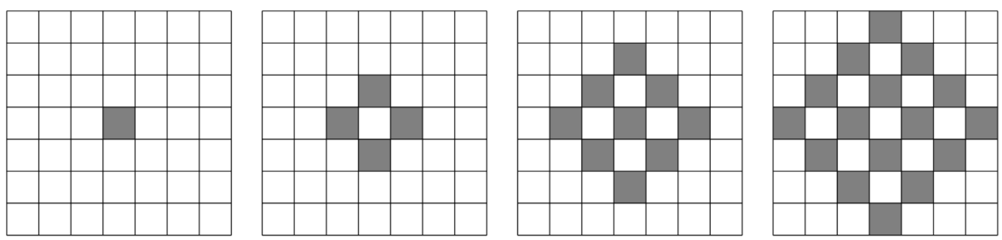
Hoofdstuk 1: Kleine voorbeelden en patronen - Uitwerkingen

Opgave 1.1.
Op een 2019×2019-schaakbord heerst een besmettelijke ziekte. Elke dag zijn sommige vakjes van het schaakbord ziek en is de rest gezond. Een gezond vakje dat grenst (met een zijde) aan een ziek vakje wordt zelf de volgende dag ziek. Een ziek vakje is altijd de volgende dag weer gezond. Een gezond vakje dat eerder al een keer ziek is geweest, kan opnieuw ziek worden (als hij besmet wordt door een aangrenzend ziek vakje). Op dag 1 is alleen het middelste vakje ziek.
Hoeveel vakjes zijn er ziek op dag 100?

A) 200 B) 298 C) 396 D) 9999 E) 10000

Eerste ronde 2019, A2

Antwoord: E) 10000
Uitwerking: Als we kijken welke vakjes er op dag 1, 2, 3 en 4 ziek zijn, dan zien we dat die vakjes precies een over 45° gedraaid vierkant vormen (zie hieronder). Op dag 1 is er $1^2 = 1$ vakje ziek, op dag 2 zijn het er $2^2 = 4$, dan $3^2 = 9$ en dan $4^2 = 16$. Op dag 5 zijn dezelfde vakjes ziek als op dag 3 met nog een hele rand nieuwe zieke vakjes daaromheen, zodat het een 5×5-vierkant wordt. Dit patroon zet zich voort en op dag 100 zijn er dus $100^2 = 10000$ vakjes ziek.



dag 1 dag 2 dag 3 dag 4

Opgave 1.2.
We rangschikken de positieve oneven getallen als volgt:

	kolom 1	kolom 2	kolom 3	kolom 4	kolom 5	kolom 6	⋮
rij 1	1	3	11	13	29	31	...
rij 2	5	9	15	27	33	...	
rij 3	7	17	25	35	...		
rij 4	19	23	37	...			
rij 5	21	39	...				
rij 6	41	...					
...	...						

We kunnen van elk oneven getal zeggen in welke rij en kolom het staat. Het getal 35 staat bijvoorbeeld in rij 3 en kolom 4.
Welk getal staat er in rij 22 en kolom 24?

A) 2021 B) 2023 C) 2025 D) 2027 E) 2029

Eerste ronde 2021, A8

Antwoord: D) 2027
Uitwerking: We zien dat op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder precies de kwadraten van de oneven getallen komen te staan ($1, 9, 25, 49, \text{enzovoorts}$). Verder is het zo dat als je een zeker oneven getal op de diagonaal schrijft, het volgende oneven getal daar rechtsboven komt.
Het getal in rij n en kolom n is $(2n-1)^2$. In rij 23 en kolom 23 staat dus het getal $45^2 = 2025$. Het getal in rij 22 en kolom 24 staat hier rechtsboven. Dat is dus het volgende oneven getal: 2027.

Opgave 1.3.
Montasser maakt een rij getallen. De eerste twee getallen zijn 6 en 15. Hij maakt steeds het volgende getal in de rij door het laatste getal te delen door het getal daarvoor en het resultaat te vermenigvuldigen met 2. Zo is het derde getal in de rij dus $\frac{15}{6} \cdot 2 = 5$ en het vierde getal is $\frac{5}{15} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.
Wat is het honderdste getal in de rij?

A) 15 B) 5 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{15}$ E) $\frac{4}{5}$

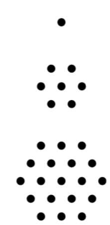
Eerste ronde 2024, A3

Antwoord: C) $\frac{2}{3}$
Uitwerking: We berekenen de volgende getallen in deze rij:

- 6;
- 15;
- $\dfrac{15}{6} \cdot 2 = 5$;
- $\dfrac{5}{15} \cdot 2 = \dfrac{2}{3}$;
- $\dfrac{2}{3} : 5 \cdot 2 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 2 = \dfrac{4}{15}$;
- $\dfrac{4}{15} : \dfrac{2}{3} \cdot 2 = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 2 = \dfrac{4}{5}$;
- $\dfrac{4}{5} : \dfrac{4}{15} \cdot 2 = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{15}{4} \cdot 2 = 6$;
- $6 : \dfrac{4}{5} \cdot 2 = 6 \cdot \dfrac{5}{4} \cdot 2 = 15$;
- ...

We zien dat de rij periodiek is: dezelfde zes getallen herhalen zich steeds. Het eerste getal is een 6, het zevende getal is een 6, ..., het 97ste getal is een 6. Het honderdste getal is dus $\dfrac{2}{3}$.

Opgave 1.4.
We bekijken gestipte zeshoeken met 1, 2, 3, . . . stippen aan één zijde, zie ook hiernaast. Het aantal stippen in een dergelijke zeshoek heet een *zeshoeksgetal*. Het eerste zeshoeksgetal is 1, het tweede is 7 en het derde is 19.
Welk van de onderstaande getallen is ook een zeshoeksgetal?



A) 81 B) 128 C) 144 D) 169 E) 187

Eerste ronde 2017, A2

Antwoord: D) 169
Uitwerking: Stel dat we met de eerste zeshoek beginnen (een losse stip). Dan kunnen we daar de volgende zeshoek uit krijgen door rondom de stip zes nieuwe stippen te zetten. Vervolgens kunnen we de derde zeshoek krijgen door rondom de huidige zeshoek weer een nieuwe laag toe te voegen aan de rand. In dit geval voegen we twaalf nieuwe stippen toe. We zien dat het aantal stippen dat je aan de rand toe moet voegen om de volgende zeshoek te krijgen telkens met zes toeneemt. Dit is omdat het aantal stippen op elk van de zijdes van de zeshoek met één toeneemt.

Na 19 is het volgende zeshoeksgetal dus $19 + 18 = 37$, dan krijgen we $37 + 24 = 61$, dan $61 + 30 = 91$, dan $91 + 36 = 127$, dan $127 + 42 = 169$ en ten slotte $169 + 48 = 217$. We zien dat van de vijf gegeven getallen alleen 169 een zeshoeksgetal is.

Opgave 1.5.

Een 100×100-bord wordt gevuld met getallen. In het vakje helemaal linksonder komt een 0. Vanuit elk ander vakje V bekijken we een route vanaf het vakje linksonder naar vakje V, waarbij je alleen stappen naar rechts en naar boven mag nemen, niet diagonaal. Als je alle getallen die je onderweg tegenkomt optelt, en daar vervolgens nog 1 bij optelt voor elke stap die je hebt genomen, dan krijg je het getal dat in vakje V staat. Hiernaast is een deel van het bord al ingevuld. Het getal 15 is bijvoorbeeld verkregen uit $(0 + 1 + 3 + 7) + 4 = 15$.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
3	7	15	$\cdots$
1	3	7	$\cdots$
0	1	3	$\cdots$

Wat is het laatste cijfer van het getal in het vakje helemaal rechtsboven van het 100×100-bord?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Eerste ronde 2017, A6

Antwoord: B) 3

Uitwerking: We bekijken een route van het vakje linksonder naar het vakje rechtsboven. Deze route telt $99 + 99 = 198$ stappen. De getallen op de vakjes langs deze route noemen we $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{198}$.

We weten dat $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en $a_2 = 3$. Om het volgende getal, a_3, uit te rekenen moeten we de getallen a_0, a_1 en a_2 optellen en 1 optellen voor elke stap die we zetten. We vinden dan dat $a_3 = (a_0+1)+(a_1+1)+(a_2+1) = 7$. Om vervolgens het getal daarna, dat is a_4, uit te rekenen moeten we weer dezelfde som nemen en daar $a_3 + 1$ bij optellen. We zien dus dat $a_4 = a_3 + (a_3 + 1) = 15$. In het algemeen zien we dat

$$a_{k+1} = (a_1 + 1) + \cdots + (a_{k-1} + 1) + (a_k + 1) = a_k + (a_k + 1) = 2a_k + 1.$$

Kijken we alleen naar de laatste cijfers, dan zal opvallen dat deze zich herhalen; na de eerste 0 komen namelijk: $1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5$, enzovoorts. Het is makkelijk te verklaren waarom deze regelmaat optreedt. Het laatste cijfer van a_{k+1} hangt namelijk alleen af van het laatste cijfer van a_k. Om deze reden zet deze regelmaat zich door tot en met a_{198}. We zien daarom dat de getallen $a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, \ldots, a_{198}$ allemaal op een 3 eindigen.

Opgave 1.6.

Bij een quiz beantwoord je 10 vragen. Elke vraag is moeilijk of makkelijk. Voor een moeilijke vraag krijg je 5 punten als je hem goed hebt en -1 punt als je hem fout hebt; voor een makkelijke vraag krijg je 3 punten als je hem goed hebt en -1 punt als je hem fout hebt. Bovendien geldt: als je een vraag goed hebt, is de volgende een moeilijke; als je een vraag fout hebt, is de volgende een makkelijke. Je begint met een moeilijke vraag.

Hoeveel verschillende eindscores zijn er mogelijk na 10 vragen?

Eerste ronde 2017, B4

Antwoord: 27

Uitwerking: Om het probleem te vereenvoudigen bekijken we een variant van de quiz. We geven voor elke vraag één extra punt: 6 punten voor een goed antwoord op een moeilijke vraag, 4 punten voor een goed antwoord op een makkelijke vraag en 0 punten voor een fout antwoord. Iedereen krijgt dus precies 10 punten extra, zodat het aantal mogelijke eindscores niet verandert. We zien nu dat alle scores deelbaar zijn door 2 en we delen door 2 om het probleem nog eenvoudiger te maken. Een deelnemer krijgt nu 3, 2 of 0 punten voor elke vraag. Ook dit verandert het aantal mogelijke eindscores niet.

De eindscore is maximaal 30 punten (als alle vragen goed beantwoord worden) en minimaal 0 punten (als alle vragen fout beantwoord worden). Nu gaan we laten zien dat de eindscores 1, 25, 28 en 29 niet mogelijk zijn en dat alle andere scores van 0 tot en met 30 wel mogelijk zijn.

De eindscores 0, 3, 6, . . . , 30 kunnen we behalen door eerst respectievelijk 0, 1, 2, 3, . . . , 10 vragen goed te beantwoorden en daarna alle vragen fout te beantwoorden.

De eindscores 2, 5, 8, . . . , 26 kunnen we behalen door eerst respectievelijk 9, 8, 7, 6, . . . , 1 vragen fout te beantwoorden, daarna een makkelijke vraag goed te beantwoorden en vervolgens alle moeilijke vragen daarna goed te beantwoorden.

De eindscores 4, 7, 10, . . . , 22 kunnen we behalen door eerst respectievelijk 7, 6, 5, . . . , 1 vragen fout te beantwoorden, daarna een makkelijke vraag goed, een moeilijke vraag fout, een makkelijke vraag goed en alle moeilijke vragen daarna goed te beantwoorden.

Als er minstens één vraag goed beantwoord is, dan heb je al ten minste 2 punten. Om die reden is de eindscore 1 niet mogelijk. Als er minstens één vraag fout beantwoord is, dan heb je ten hoogste $9 \cdot 3 = 27$ punten. Om die reden zijn de eindscores 28 en 29 niet mogelijk. Als er precies één vraag fout beantwoord is, dan kunnen er twee dingen gebeurd zijn: de fout beantwoorde vraag is de laatste vraag en je hebt $9 \cdot 3 = 27$ punten, of de fout beantwoorde vraag is niet de laatste vraag en je hebt $8 \cdot 3 + 2 = 26$ punten. Als er minstens twee vragen fout beantwoord zijn, dan heb je ten hoogste $8 \cdot 3 = 24$ punten. Om die reden is ook de eindscore 25 niet mogelijk.

We zien dat de mogelijke eindscores (in het nieuwe quiz-format) de getallen van 0 tot en met 30 zijn, met uitzondering van 1, 25, 28 en 29. (In het oorspronkelijke quiz-format zijn de mogelijke eindscores de even getallen van -10 tot en met 50, met uitzondering van -8, 40, 46 en 48.) Er zijn dus 27 mogelijke eindscores.

Hoofdstuk 2: Durf te proberen - Uitwerkingen

Opgave 2.1.
We noemen een positief geheel getal *kwadraardig* als elke twee cijfers die naast elkaar staan in het getal, een kwadraat vormen. Het getal 364 is bijvoorbeeld kwadraardig, want zowel 36 als 64 is een kwadraat.
Hoeveel cijfers heeft het grootste kwadraardige getal?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Eerste ronde 2024, A1

Antwoord: D) 5
Uitwerking: De kwadraten van twee cijfers zijn 16, 25, 36, 49, 64 en 81. We beginnen met elk van deze kwadraten, en kijken welk cijfer we erachter kunnen plakken zodanig dat de laatste twee cijfers ook weer een kwadraat vormen. Bijvoorbeeld: na 16 kan een 4 vanwege 64 (en er kan geen ander cijfer achter de 6), dan komt een 9 die 49 vormt, en daarna houdt het op omdat er geen kwadraat begint met een 9. Met de zes verschillende beginkwadraten maak je maximaal de volgende getallen: 1649, 25, 3649, 49, 649, 81649. Het grootste getal uit deze lijst, 81649, bestaat uit vijf cijfers.

Opgave 2.2.
Als je de cijfers van het getal 2022 bij elkaar optelt, krijg je 6.
Hoeveel getallen van 4 cijfers (inclusief 2022 zelf) zijn er waarbij je, als je de cijfers bij elkaar optelt, 6 krijgt? De getallen mogen niet met een 0 beginnen.

A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 56

Eerste ronde 2022, A4

Antwoord: E) 56
Uitwerking: Voor de vier cijfers van het getal zijn er niet zo heel veel mogelijkheden. We gaan ze allemaal af.

Een keer 6 en drie keer 0. Een viercijferig getal kan niet met een 0 beginnen, dus hier is maar 1 mogelijkheid.

Een keer 5, een keer 1 en twee keer 0. We kunnen beginnen met de 1 en dan zijn er voor de positie van de 5 nog 3 mogelijkheden. Andersom kunnen we ook beginnen met de 5 en dan zijn er voor de positie van de 1 nog 3 mogelijkheden. Samen zijn er dus $3 + 3 = 6$ manieren.

Een keer 4, een keer 2, en twee keer 0. Met precies dezelfde argumentatie als in het vorige geval zijn er 6 mogelijkheden.

Een keer 4, twee keer 1 en een keer 0. Voor de 0 kiezen we een positie niet aan het begin; dat kan op 3 manieren. Voor de 4 zijn er dan nog 3 mogelijkheden over en de andere twee cijfers zijn een 1. In totaal dus $3\times 3 = 9$ mogelijkheden.

Twee keer 3 en twee keer 0. We moeten met een 3 beginnen. Voor de andere 3 zijn nog drie posities; dit kan dus op 3 manieren.

Een keer 3, een keer 2, een keer 1 en een keer 0. Er zijn 3 mogelijkheden voor de 0, dan nog 3 mogelijkheden voor de 1, nog 2 voor de 2 en het overgebleven cijfer moet dan wel een 3 zijn. Dit zijn dus $3\times 3\times 2 = 18$ mogelijkheden.

Een keer 3 en drie keer 1. De 3 kan op elk van de vier mogelijke posities, de overige cijfers zijn dan 1'en. Dit kan op 4 manieren.

Drie keer 2 en een keer 0. De 0 moet op een van de laatste drie posities komen; dat kan op 3 manieren.

Twee keer 2 en twee keer 1. Voor de eerste 1 kunnen we 4 mogelijke posities kiezen en voor de tweede 1 nog 3. Maar let op: we hebben elke mogelijkheid voor beide 1'en dan dubbel geteld (want het maakt niet uit welke 1 de eerste is). Er zijn dus $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ mogelijkheden.

In totaal hebben we $1 + 6 + 6 + 9 + 3 + 18 + 4 + 3 + 6 = 56$ oplossingen gevonden.

Opgave 2.3.
Op het krijtbord staat het getal 1. Een *zet* bestaat eruit het getal op het bord weg te vegen en te vervangen door het dubbele van het getal of door het getal dat één kleiner is. Het getal 1 mag bijvoorbeeld vervangen worden door 2 (het dubbele) of 0 (één kleiner), en als het getal 5 op het bord staat, mag je dat vervangen door 10 of 4.
Wat is het minimale aantal zetten dat nodig is om het getal 2021 op het bord te schrijven?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Eerste ronde 2021, A5

Antwoord: B) 15
Uitwerking: We gaan van achter naar voren redeneren. Het getal 2021 is oneven, dus het laatste getal wat daarvoor opgeschreven was, moet wel 2022 geweest zijn. Voor het getal daarvoor zijn er nu twee mogelijkheden: 2023 of 1011. We gaan nu laten zien dat in de oplossing met het minimale aantal zetten dit getal 1011 geweest moet zijn. Met andere woorden: wanneer we in onze omgekeerde redenering kunnen delen door 2, dan is dat altijd het beste.

Stel nu dat we eerst een aantal keer 1 optellen bij 2022 voordat we delen door 2, zeg dat we n keer een 1 optellen en dan delen door 2. Dan houden we het getal $\frac{2022+n}{2}$ over. Omdat dit geheel moet zijn, moet n wel deelbaar door 2 zijn. Het getal $\frac{2022+n}{2}$ is ook gelijk aan $1011 + \frac{n}{2}$. We hadden dus ook eerst kunnen delen door 2 en dan $\frac{n}{2}$ keer 1 kunnen optellen. Omdat $\frac{n}{2}$ kleiner is dan n, kost dit minder zetten. Eerst delen door 2 is dus altijd optimaal.

De getallen die we van achter naar voren krijgen, zijn dus:

$$2021, 2022, 1011, 1012, 506, 253, 254, 127, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.$$

We zien dus dat er minstens 15 zetten nodig zijn om 2021 op te kunnen schrijven.

Opgave 2.4.
De klas van Floor bestaat uit 16 leerlingen, inclusief Floor zelf. Alle leerlingen hebben een toets gemaakt met vier vragen. Iedere vraag was een (positief) geheel aantal punten waard. Elke vraag is volledig goed of volledig fout gerekend; er zijn geen deelpunten gegeven. De vraag waarmee de meeste punten te verdienen waren, was precies 4 punten meer waard dan de vraag die de minste punten waard was. Alle leerlingen behaalden een verschillende score; Floor had zelf alles goed.
Hoeveel punten heeft Floor minstens gescoord?

Eerste ronde 2024, B2

Antwoord: 21
Uitwerking: Er zijn 16 leerlingen en $2^4 = 16$ mogelijkheden van welke vragen je goed kan hebben. Omdat dit hetzelfde is en iedereen een ander puntenaantal heeft, moet iedere combinatie van vragen een ander puntenaantal waard zijn. In het bijzonder is elke vraag een ander aantal punten waard. We gaan nu systematisch proberen hoeveel punten de vraag waard kan zijn waarvoor je de minste punten krijgt.

Stel dat deze vraag 1 punt waard is. Dan is de vraag waar je de meeste punten voor krijgt, 5 punten waard. Er zijn dan minimaal 0 en maximaal $1 + 3 + 4 + 5 = 13$ punten te verdienen voor de hele toets, dus maximaal 14 mogelijke puntenaantallen. Maar we hebben minimaal 16 mogelijke puntenaantallen nodig, dus dit kan niet.

Stel dat de vraag waarvoor je de minste punten krijgt, 2 punten waard is. Dan is de vraag waar je de meeste punten voor krijgt, 6 punten waard. Er zijn drie mogelijke opties voor het aantal punten per vraag: 2, 3, 4, 6 of 2, 3, 5, 6 of 2, 4, 5, 6. De tweede optie kan niet, omdat de leerling die de vragen voor 2 en 3 punten goed had, net zoveel punten heeft als de leerling die alleen de vraag voor 5 punten goed had. Om een vergelijkbare reden kunnen de eerste en laatste optie niet: dan zou de leerling die de vragen voor 2 en 4 punten goed had, net zoveel punten hebben als de leerling die alleen de vraag voor 6 punten goed had.

We kijken daarom wat er gebeurt als de vraag waarvoor je de minste punten krijgt, 3 punten waard is, en de vraag waarvoor je de meeste punten krijgt, 7 punten. Er kan geen vraag zijn die 4 punten waard is, want dan zou de leerling die de vragen voor 3 en 4 punten goed had, net zoveel punten hebben als de leerling die alleen de vraag voor 7 punten goed had. Dus de vier vragen zijn 3, 5, 6 en 7 punten waard en we kunnen controleren dat alle mogelijke combinaties van nul, één, twee, drie en vier vragen goed, verschillende puntenaantallen opleveren. Floor had dus minstens $3 + 5 + 6 + 7 = 21$ punten op de toets.

Opgave 2.5.
Een positief geheel getal a bestaat uit vier cijfers, waarvan er drie gelijk aan elkaar zijn. Het kwadraat van a bestaat uit zeven cijfers, die allemaal verschillend zijn. Getal b ontstaat door getal a van achteren naar voren te lezen. Het blijkt dat getal b groter is dan a. Daarnaast blijkt dat b^2 precies gelijk is aan a^2 van achteren naar voren gelezen.
Vind alle mogelijkheden voor a.

Eerste ronde 2023, B4

Antwoord: 1113
Uitwerking: Omdat zowel a^2 als b^2 maar zeven cijfers hebben, kunnen de cijfers van a en b niet te groot zijn. Immers, $4000^2 = 16.000.000$, dus het eerste cijfer van zowel a als b is 1, 2 of 3. Omdat je b krijgt door a achterstevoren te lezen, is dus ook het laatste cijfer van zowel a als b gelijk aan 1, 2 of 3. Als het eerste en het laatste cijfer van a hetzelfde zijn, dan zijn het eerste en het laatste cijfer van b dat ook, en bovendien gelijk aan het eerste en laatste cijfer van a. Maar dan is het laatste cijfer van a^2 gelijk aan het laatste cijfer van b^2, en dat kan niet, aangezien a^2 en b^2 elk zeven verschillende cijfers hebben, in omgekeerde volgorde. Het eerste en laatste cijfer van a zijn dus niet gelijk. Dit betekent dat zowel a als b alleen de cijfers 1, 2 en 3 kan bevatten. De overgebleven mogelijkheden voor a zijn nu 1112, 1113, 1222, 1333, 2223 en 2333. De laatste drie mogelijkheden vallen meteen af omdat het kwadraat van b dan minstens 3200^2 is en dat heeft al acht cijfers. Uitproberen van de eerste drie mogelijkheden geeft $a = 1113$ als enige mogelijkheid. In dat geval geldt $a^2 = 1.238.769$, $b = 3111$ en $b^2 = 9.678.321$.

Hoofdstuk 3: Letters invoeren en vergelijkingen - Uitwerkingen

Opgave 3.1.
Een eilandengroep bestaat uit een groot, een middelgroot en een klein eiland. De gezamenlijke oppervlakte van de drie eilanden is 23 km^2. Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland blijkt precies 1 km^2 meer te zijn dan de oppervlakte van het kleine eiland.
Hoeveel km^2 is de oppervlakte van het grote eiland?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Eerste ronde 2022, A1

Antwoord: C) 12
Uitwerking: Er zijn drie eilanden met de oppervlaktes G (groot), M (middelgroot) en K (klein). We weten dat de totale oppervlakte 23 km^2 is, dus er geldt $G+M+K=23$. Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland is 1 km^2 meer dan de oppervlakte van het kleine eiland, dus $G-M=K+1$. Uit de tweede vergelijking volgt $G=M+K+1$. Vervolgens vullen we deze vergelijking in in de eerste vergelijking. Dan vinden we: $(M+K+1)+M+K=23$, oftewel $2M+2K=22$, dus $M+K=11$. Hiermee vinden we uiteindelijk de oppervlakte van het grote eiland, namelijk $G=11+1=12$.

Opgave 3.2.
In een klaslokaal staan stoelen en krukken. Op elke stoel en op elke kruk zit een kind. Elke stoel heeft 4 poten, elke kruk heeft 3 poten en elk kind heeft 2 benen. Bij elkaar geeft dit een totaal van 39 poten en benen.
Hoeveel stoelen staan er in de klas?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

Eerste ronde 2018, A1

Antwoord: B) 4
Uitwerking: Noem s het aantal stoelen en k het aantal krukken. Dan zitten er $s+k$ kinderen op de stoelen en krukken samen. De stoelen geven $4s$ poten, de krukken geven $3k$ poten en de kinderen geven $2(s+k)=2s+2k$ benen. In totaal hebben we 39 poten en benen, dus er moet gelden $4s+3k+2s+2k=6s+5k=39$, dus $k=7,8-1,2s$. Nu hoeven we alleen nog de mogelijkheden voor s langs te gaan: $s=3$ geeft $k=4{,}2$, $s=4$ geeft $k=3$, $s=5$ geeft $k=1{,}8$, $s=6$ geeft $k=0{,}6$ en $s=9$ geeft $k=-3$. We zien dat alleen $s=4$ een correct antwoord oplevert.

Opgave 3.3.
Morgen gaat de familie Janssen met de auto op reis en ze hebben daarvoor een mooie route op het oog. De jongste van het gezin merkt op dat hun geplande tussenstop in Duitsland qua afstand precies halverwege de route ligt. Vader reageert: “Wanneer we morgen na 150 kilometer de grens over gaan, dan ligt onze tussenstop op nog maar een vijfde van de overgebleven route”.
Hoeveel kilometer lang is de route van de familie Janssen?

Eerste ronde 2024, B1

Antwoord: 400
Uitwerking: Noem het aantal kilometer van de gehele route r. Dan is de afstand van het huis van de familie Janssen naar de tussenstop gelijk aan $\frac{1}{2}r$. Dit is ook gelijk aan 150 kilometer plus een vijfde van de afstand van de grens tot de eindbestemming, dat is $150+\frac{1}{5}(r-150)$. We vinden dat $\frac{1}{2}r=150+\frac{1}{5}(r-150)$. Oplossen van deze vergelijking geeft $r=400$.

Opgave 3.4.
Drie jaar geleden was Rosa's moeder precies vijfmaal zo oud als Rosa toen was. Rosa's moeder was toen precies even oud als Rosa's oma was op het moment dat Rosa's moeder werd geboren. Nu is Rosa's oma precies zeven keer zo oud als Rosa zelf.
Hoe oud is Rosa's moeder nu?

Eerste ronde 2018, B1

Antwoord: 33 jaar
Uitwerking: Noem de leeftijd van Rosa r, de leeftijd van moeder m en de leeftijd van oma o. Drie jaar geleden was Rosa's moeder vijfmaal zo oud als Rosa toen was, dus hieruit volgt de vergelijking $m-3 = 5(r-3)$. Drie jaar geleden was Rosa's moeder even oud als Rosa's oma was op het moment dat Rosa's moeder werd geboren, hieruit volgt de vergelijking $m-3 = o-m$. Nu is Rosa's oma zeven keer zo oud als Rosa, dus $o = 7r$. Uit de eerste vergelijking volgt $m = 5r - 12$ en uit de tweede vergelijking volgt $m = 0,5(o+3) = 0,5o+1,5$. Ten slotte gebruiken we de derde vergelijking om $m = 3,5r + 1,5$ te vinden. Nu kunnen we oplossen $5r - 12 = 3,5r + 1,5$ en vinden $r = 9$. We vullen dit in in $m = 5r - 12$ en vinden $m = 33$.

Opgave 3.5.
Annemiek en Bart hebben elk drie verschillende positieve gehele getallen op een briefje geschreven. Het blijkt dat er precies één getal is dat op allebei hun briefjes staat. Verder geldt dat als je twee verschillende getallen van Annemieks briefje neemt en die optelt, de uitkomst altijd een getal op Barts briefje is. Een van de drie getallen op het briefje van Annemiek is haar lievelingsgetal, en als je dat met 3 vermenigvuldigt, krijg je ook een getal van het briefje van Bart. Op Barts briefje staat zijn lievelingsgetal en dat is 25.
Wat is het lievelingsgetal van Annemiek?

Eerste ronde 2020, B3

Antwoord: 5
Uitwerking: Stel we noemen de drie getallen op Annemieks briefje a, b en c en we nemen aan dat $a < b < c$. Dan zijn de drie getallen op Barts briefje op volgorde van grootte $a + b$, $a + c$ en $b + c$. De laatste twee getallen zijn groter dan c en dus groter dan elk getal op Annemieks briefje. Het getal dat op beide briefjes staat, is dus $a + b$ en dat moet wel gelijk zijn aan c.

Annemiek heeft dus de getallen a, b en $a + b$ en Bart heeft $a + b$, $2a + b$ en $a + 2b$. Als we nu naar $3b$ en $3(a + b) = 3a + 3b$ kijken, zien we dat die getallen beide groter zijn dan alle getallen op Barts briefje. Het lievelingsgetal van Annemiek, dat op Barts briefje staat als je het met 3 vermenigvuldigt, is dus a.

Het getal $3a$ is dus een van de getallen $a + b$, $2a + b$, $a + 2b$ op Barts briefje, en omdat a en b verschillend zijn, moet dat wel het getal $a + b$ zijn. Met andere woorden: $b = 2a$. Bart heeft dus de getallen $3a$, $4a$ en $5a$. Het enige getal van die drie dat het getal 25 kan zijn, is $5a$. We zien dus dat $a = 5$ en dat is meteen het lievelingsgetal van Annemiek.

Opgave 3.6.
In de tabel hieronder is elk van de drie rijen een kloppende rekensom (met ÷ wordt deling aangegeven). Ook elk van de drie kolommen is (van boven naar beneden gelezen) een kloppende rekensom. In de tabel zijn echter de cijfers vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers en alle cijfers zijn ongelijk aan 0.

$$\begin{array}{ccccc} ABC & - & ADF & = & F \\ + & & - & & - \\ ADD & \div & GC & = & C \\ = & & = & & = \\ CEF & \div & GD & = & D \end{array}$$

Voor welk cijfer staat de letter E?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Eerste ronde 2020, A6

Antwoord: E) 9
Uitwerking: Uit de eerste rij volgt dat

$$ADF + F = ABC.$$

Het cijfer C is dus even en bovendien niet 0. De mogelijkheden zijn dus: $2, 4, 6$ en 8. Uit de middelste rij volgt dan dat

$$C \cdot GC = ADD.$$

Aangezien $2 \cdot 2 = 4$, $4 \cdot 4 = 16$, $6 \cdot 6 = 36$ en $8 \cdot 8 = 64$, volgt nu dat het cijfer D een 4 of een 6 is. De laatste rij geeft vervolgens

$$D \cdot GD = CEF.$$

Aangezien $4 \cdot 4 = 16$ en $6 \cdot 6 = 36$, moet het cijfer F nu wel de 6 zijn. Omdat de cijfers verschillend zijn, moet D de 4 zijn. De eerste rij geeft nu

$$A46 + 6 = ABC.$$

We zien dus dat B het cijfer 5 is en C het cijfer 2. De eerste kolom is nu

$$A52 + A44 = 2E6.$$

Het cijfer E is dus 9. *Daarnaast geldt* $A = 1$ *en* $G = 7$.

Opgave 3.7.
We hebben twee gehele getallen van twee cijfers, die niet beginnen met een 0. Als je deze getallen bij elkaar optelt, krijg je het getal S. Als je van beide getallen de twee cijfers verwisselt en deze twee nieuwe getallen bij elkaar optelt, dan krijg je $4S$.
Bepaal alle mogelijke paren van tweecijferige getallen waarvoor dit geldt. Geef in je antwoord duidelijk aan welke twee getallen bij elkaar horen.

Eerste ronde 2021, B1

Antwoord: {14, 19}, {15, 18} en {16, 17}
Uitwerking: We noemen de cijfers van onze twee getallen a, b, c en d, zodat het eerste getal gelijk is aan $10a + b$ en het tweede getal gelijk is aan $10c + d$. We krijgen dus dat

$$S = 10(a + c) + b + d.$$

De getallen die we krijgen door de cijfers te verwisselen zijn $10b + a$ en $10d + c$. Als we die optellen krijgen we

$$4S = 10(b + d) + a + c.$$

Als we nu de eerste vergelijking met -4 vermenigvuldigen en bij de tweede vergelijking optellen, dan krijgen we

$$0 = -39(a + c) + 6(b + d),$$

oftewel

$$13(a + c) = 2(b + d).$$

De rechterkant van de laatste vergelijking kan alleen deelbaar door 13 zijn, als $b + d$ deelbaar door 13 is. Maar $b + d$ is minimaal 0 en maximaal 18, dus dat kan alleen als $b + d = 0$ of $b + d = 13$.

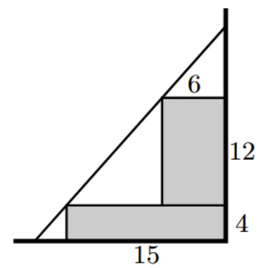
Als $b + d = 0$, dan moet ook $a + c = 0$ gelden. Beide getallen beginnen dan met een 0 en dat was niet toegestaan. Die mogelijkheid valt dus af.

Als $b + d = 13$, dan moet $a + c = 2$ gelden. De cijfers a en c kunnen niet nul zijn. We hebben dus $a = c = 1$. Voor het paar $\{b, d\}$ hebben we de mogelijkheden $\{4, 9\}$, $\{5, 8\}$ en $\{6, 7\}$. De mogelijke beginparen zijn dus $\{14, 19\}$, $\{15, 18\}$ en $\{16, 17\}$. Het is eenvoudig na te gaan dat dit ook daadwerkelijk oplossingen zijn. In alle gevallen krijgen we als som $S = 33$ en als som van de omgekeerde getallen precies $132 = 4S$.

Hoofdstuk 4: Meetkundig kijken - Uitwerkingen

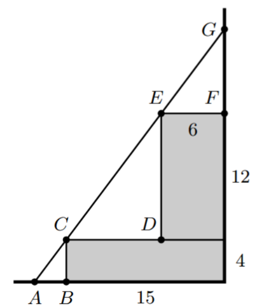
Opgave 4.1.
Een kist van 4 dm bij 15 dm ligt tegen de muur aan geschoven. Hierop staat een tweede kist, van 12 dm bij 6 dm. Een ladder raakt precies de grond, de twee kisten en de muur. Zie de weergave in de figuur (niet op schaal).
Hoeveel dm lang is de ladder?

A) 30 B) $8\sqrt{15}$ C) 31 D) $22\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{3}$



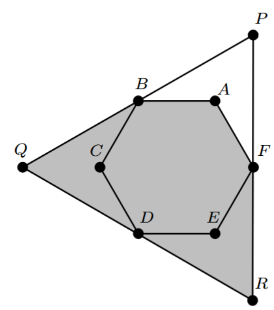
Eerste ronde 2020, A4

Antwoord: A) 30
Uitwerking: Bekijk de rechthoekige driehoek CDE in de figuur. We zien dat $CD = 15 - 6 = 9$ en $DE = 12$. Met de stelling van Pythagoras volgt dat $CE = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Driehoek EFG is gelijkvormig met driehoek CDE, dus geldt dat $EG : EF = CE : CD$. We zien dat $EG : 6 = 15 : 9$, zodat $EG = \frac{6 \cdot 15}{9} = 10$. Op dezelfde manier zien we dat $AC : BC = CE : DE$, dus $AC : 4 = 15 : 12$. Er volgt dat $AC = \frac{4 \cdot 15}{12} = 5$. De lengte van de ladder is dus gelijk aan $AC + CE + EG = 5 + 15 + 10 = 30$.



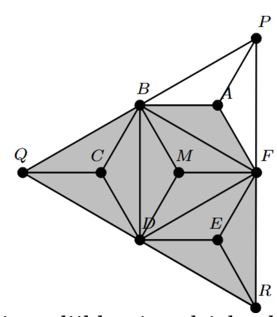
Opgave 4.2.
Gegeven is de gelijkzijdige driehoek PQR. Binnen deze driehoek is een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ getekend. Punten B, D en F zijn de middens van de zijden van driehoek PQR. De oppervlakte van de vijfhoek $QBAFR$ is gelijk aan 1.
Wat is de oppervlakte van driehoek PQR?

A) $\frac{11}{10}$ B) $\frac{7}{6}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{3}$



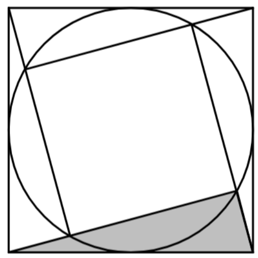
Eerste ronde 2022, A5

Antwoord: C) $\frac{6}{5}$
Uitwerking: We tekenen het middelpunt M van de driehoek, dat ook het middelpunt van de zeshoek is. Teken vanuit M lijnstukken naar de hoekpunten B, F en D van de zeshoek. Teken ook de lijnstukken AP, CQ en ER. Omdat de driehoek gelijkzijdig is en de zeshoek regelmatig, is elk van die zes lijnstukken een deel van een spiegellijn van de driehoek, die ook een spiegellijn van de zeshoek is. We tekenen ten slotte de driehoek BFD. Nu hebben we de grote driehoek in twaalf kleine driehoekjes verdeeld, zoals je hiernaast kan zien.



Vanwege de symmetrie van de figuur zijn al deze driehoekjes congruent: het zijn gelijkbenige driehoeken met hoeken van 30°, 30° en 120° en hun basiszijde is telkens even lang als de helft van de zijde van de grote driehoek. De grijze vijfhoek heeft een oppervlakte van 10 driehoekjes en de grote driehoek heeft een oppervlakte van 12 driehoekjes. De oppervlakte van de grote driehoek is dus $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Opgave 4.3.
In onderstaande figuur heeft het grote vierkant zijde 6. De cirkel raakt aan alle zijden van het grote vierkant. De vier driehoeken zijn precies gelijke rechthoekige driehoeken en staan direct tegen elkaar aan; het kleine vierkant dat zij insluiten, heeft zijn hoekpunten precies op de cirkel.



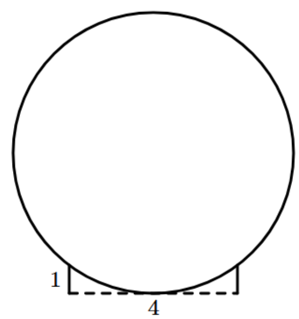
Wat is de oppervlakte van de grijze driehoek?

Eerste ronde 2022, B2

Antwoord: $4\frac{1}{2}$
Uitwerking: De straal van de cirkel is 3. Het kleine vierkant kunnen we langs de diagonaal opdelen in twee driehoeken. Met de lange zijde (lengte 6) als basis hebben deze een hoogte van 3 en dus een oppervlakte van $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$. De vier kleine driehoeken aan de buitenkant hebben dus samen een oppervlakte van $36 - 2 \cdot 9 = 18$. Dus de grijze driehoek heeft oppervlakte $\frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$.

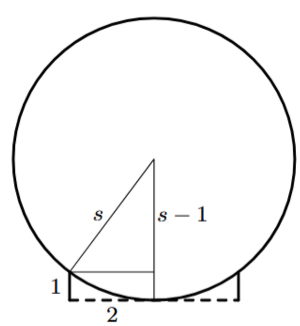
Opgave 4.4.
Bij de tafeltennisclub van Matthijs leggen ze hun pingpongballetjes altijd op een tafel met cilindervormige balhouders. Hiernaast zie je het zij-aanzicht van een pingpongballetje bovenop een balhouder. De onderkant van het balletje raakt precies de tafel. Het is bekend dat de balhouder 4 centimeter breed is en 1 centimeter hoog.
Hoeveel centimeter is de straal van het balletje? *Let op: het plaatje is niet op schaal.*

A) $2\frac{1}{3}$ B) $2\frac{1}{2}$ C) $2\frac{2}{3}$ D) $2\frac{5}{6}$ E) 3



Eerste ronde 2024, A6

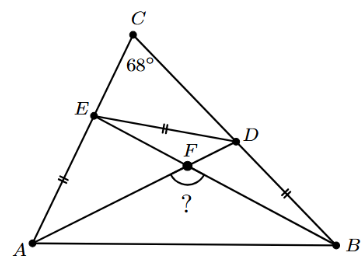
Antwoord: B) $2\frac{1}{2}$
Uitwerking: We tekenen een hulplijn van het middelpunt van het balletje naar de rand van de houder, en van het middelpunt van het balletje naar de tafel. Ook tekenen we een lijn evenwijdig aan de tafel. We zijn op zoek naar s, de straal van het balletje.



We zien een rechthoekige driehoek met rechthoekszijdes 2 en $s-1$ en schuine zijde s. De stelling van Pythagoras geeft dat $2^2 + (s-1)^2 = s^2$. Uitwerken geeft $4 + s^2 - 2s + 1 = s^2$, oftewel $2s = 5$. Dus $s = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Opgave 4.5.
In driehoek ABC ligt op zijde BC een punt D en op zijde AC een punt E zodanig dat lijnstukken BD, DE en AE allemaal even lang zijn. Het punt F is het snijpunt van de lijnstukken AD en BE. Hoek C is $68°$.
Hoe groot is hoek F in driehoek AFB?

A) $120°$ B) $121°$ C) $122°$ D) $123°$ E) $124°$



Eerste ronde 2021, A6

Antwoord: E) $124°$
Uitwerking: Eerst kijken we naar de linkerkant van het plaatje. We zien dat $\triangle AED$ een gelijkbenige driehoek is en dus zijn de hoeken $\angle EAD$ en $\angle EDA$ gelijk. De hoekensom van een driehoek is $180°$, dus geldt $\angle AED + 2 \cdot \angle EDA = 180°$. Omdat $\angle AEC$ een gestrekte hoek is, geldt ook dat $\angle AED + \angle CED = 180°$. Hieruit volgt dat $\angle CED = 2 \cdot \angle EDA$.

Via dezelfde redenering aan de rechterkant van het plaatje, beginnend vanuit de gelijkbenige driehoek $\triangle BDE$, volgt dat $\angle CDE = 2 \cdot \angle DEB$. Vanwege de hoekensom van $180°$ in de bovenste driehoek $\triangle ECD$ zien we dat

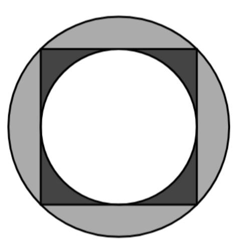
$$\begin{aligned}
180° &= \angle ECD + \angle CED + \angle CDE \\
180° &= 68° + 2 \cdot \angle EDA + 2 \cdot \angle DEB \\
112° &= 2 \cdot (\angle EDA + \angle DEB) \\
56° &= \angle EDA + \angle DEB
\end{aligned}$$

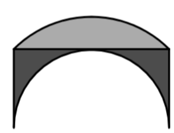
Nu kijken we naar de driehoek $\triangle EFD$. De hoekensom is $180°$ en twee van de drie hoeken zaten al in eerdere driehoeken. Dus vinden we dat

$$\begin{aligned}
180° &= \angle DEF + \angle EDF + \angle EFD \\
180° &= \angle DEB + \angle EDA + \angle EFD \\
180° &= 56° + \angle EFD \\
124° &= \angle EFD
\end{aligned}$$

Ten slotte merken we op dat $\angle AFB$ en $\angle EFD$ overstaande hoeken zijn en dus gelijk zijn. Dus de hoek bij het vraagteken is $124°$.

Opgave 4.6.
We bekijken een vierkant, de cirkel door de hoekpunten van het vierkant en de cirkel die raakt aan de vier zijden van het vierkant (zie de linkerfiguur). Het oppervlak van de ring tussen de twee cirkels is verdeeld in vier donkere stukken (binnen het vierkant) en vier lichte stukken (buiten het vierkant). De oppervlakte van het vierkant is 60.





Wat is de gezamelijke oppervlakte van twee donkere stukken en één licht stuk, zoals afgebeeld in de rechterfiguur?

Eerste ronde 2018, B3

Antwoord: 15
Uitwerking: De diagonaal van het vierkant is $\sqrt{2}$ maal zo lang als de zijde van het vierkant. De diameters van de twee cirkels verhouden zich dus als $1 : \sqrt{2}$ en daarmee verhouden hun oppervlaktes zich als $1 : 2$ want de oppervlakte schaalt met het kwadraat van de diameter.

Omdat de oppervlakte van de grote cirkel tweemaal zo groot is als die van de kleine cirkel, is de oppervlakte van de vier lichtgrijze stukken en de vier donkergrijze stukken samen gelijk aan de oppervlakte van de kleine cirkel.

De kleine cirkel en de vier donkergrijze stukken vormen samen het vierkant en hebben dus samen een oppervlakte van 60. Met de eerdere opmerking concluderen we nu dat de oppervlakte van vier lichtgrijze stukken en acht donkergrijze stukken samen gelijk is aan 60.

De gevraagde oppervlakte van één lichtgrijs stuk en twee donkergrijze stukken is dus gelijk aan een kwart hiervan: $\frac{60}{4} = 15$.

Hoofdstuk 5: Logisch redeneren: wat weten we wel? - Uitwerkingen

Opgave 5.1.
Voor gehele getallen a, b, c en d geldt dat het verschil tussen a en b gelijk is aan 2, het verschil tussen b en c gelijk aan 3 en het verschil tussen c en d gelijk aan 4.
Welk van de onderstaande waarden kan niet het verschil tussen a en d zijn?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Eerste ronde 2021, A1

Antwoord: D) 7
Uitwerking: Uit de gegevens in de opgave leiden we af dat $a - b = \pm 2$, $b - c = \pm 3$ en $c - d = \pm 4$. We krijgen dan

$$a - d = (a - b) + (b - c) + (c - d) = \pm 2 \pm 3 \pm 4.$$

We kunnen nu alle acht mogelijkheden voor de plus- en mintekens afgaan:

$$\begin{aligned} 2+3+4 &= 9, & 2+3-4 &= 1, \\ 2-3+4 &= 3, & 2-3-4 &= -5, \\ -2-3-4 &= -9, & -2-3+4 &= -1, \\ -2+3-4 &= -3, & -2+3+4 &= 5. \end{aligned}$$

De enige waarde die niet voorkomt (noch met een plusteken, noch met een minteken) is 7.

Opgave 5.2.
Caitlin maakte in oktober elke dag een lange wandeling. Alleen op de 16 dagen dat er regen werd verwacht, nam ze een paraplu mee. Van de 31 dagen van oktober was de regenverwachting op precies 21 dagen correct. Gelukkig had Caitlin op de dagen dat het ging regenen altijd haar paraplu bij zich.
Hoeveel dagen heeft het niet geregend?

A) 6 B) 10 C) 16 D) 21 E) 25

Eerste ronde 2024, A2

Antwoord: E) 25
Uitwerking: Op de $31 - 16 = 15$ dagen in oktober dat er geen regen werd verwacht, was de voorspelling blijkbaar correct. Dus van de andere 16 dagen (waarop er wel regen werd verwacht) was de voorspelling maar op $21 - 15 = 6$ dagen correct. Het regende dus op precies 6 dagen, dus op $31 - 6 = 25$ dagen niet.

Opgave 5.3.
In een toernooi met de vier teams A, B, C en D speelde elk team eenmaal tegen elk ander team in drie rondes van elk twee gelijktijdige wedstrijden. Geen enkel team won of verloor alle wedstrijden en geen enkele wedstrijd eindigde in een gelijkspel. Bekend is dat team A in de eerste en derde ronde won. Verder won team C in de eerste ronde en verloor team D in de tweede ronde. Vijf mensen doen na afloop uitspraken over het toernooi, maar slechts één van hen spreekt de waarheid.
Welke uitspraak is waar?

A) A en B speelden tegen elkaar in ronde 1 B) C won van B

C) A en D speelden tegen elkaar in ronde 3 D) D won van A

E) B en C speelden tegen elkaar in ronde 2

Eerste ronde 2022, A7

Antwoord: B) C won van B
Uitwerking: Team A won in de eerste en in de derde ronde, en verloor dus in de tweede ronde. Team C won in de eerste ronde en speelde toen dus niet tegen team A. Team D verloor in de tweede ronde en speelde toen dus niet tegen team A. Team D verloor ook de eerste ronde, want toen wonnen A en C, dus team D moet de laatste ronde gewonnen hebben. Dan won ook team A, dus de wedstrijd tussen A en D was in de eerste ronde. De andere wedstrijd in de eerste ronde was die tussen teams B en C, waar C won.

Opgave 5.4.
Aan een ronde tafel zitten 2023 personen. Elke persoon is ofwel een schurk ofwel een ridder. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. De eerste persoon zegt: "Er zit minstens één schurk aan deze tafel." De persoon links ernaast zegt: "Er zit minstens één ridder aan deze tafel." De derde zegt: "Er zitten minstens twee schurken aan deze tafel." De vierde zegt: "Er zitten minstens twee ridders aan deze tafel." Dit gaat zo verder, tot de laatste persoon aan tafel zegt: "Er zitten minstens 1012 schurken aan deze tafel." De eerste persoon, die net al een uitspraak heeft gedaan, zegt nu: "Er zitten minstens 1012 ridders aan deze tafel."
Hoeveel schurken zitten er aan de tafel?

A) 505 B) 506 C) 1011 D) 1012 E) 1507

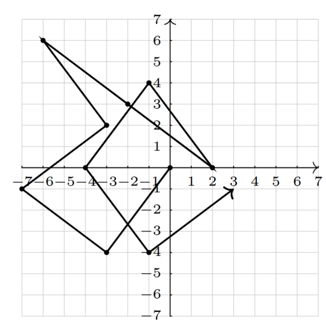
Eerste ronde 2023, A6

Antwoord: B) 506
Uitwerking: De eerste persoon kan niet liegen, want dan zou die zelf een schurk zijn en de eerste uitspraak juist waar zijn. Deze persoon is dus een ridder. Vanwege de tweede uitspraak van deze persoon zijn er dus minstens 1012 ridders. Alle 1011 andere mensen die een uitspraak doen over het aantal ridders, spreken dus de waarheid en zijn zelf een ridder.

Alle schurken zitten dus bij de 1012 mensen die een uitspraak over het aantal schurken doen. Stel dat er precies k schurken zijn. Dan spreken van die 1012 mensen precies k de waarheid en de andere $1012 - k$ liegen. Die laatste zijn dus de schurken, dus $1012 - k = k$ en daaruit volgt $k = 506$.

Opgave 5.5.
Op een assenstelsel wordt een pad vanuit de oorsprong getekend door steeds een zet te doen. Een zet bestaat uit drie stappen horizontaal en tegelijk vier verticaal bewegen, of vier horizontaal en tegelijk drie verticaal. In de figuur is zo'n pad getekend, dat uit tien zetten bestaat.
Wat is het minimale aantal zetten dat je nodig hebt om vanuit de oorsprong het punt (1, 0) te bereiken?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13



Eerste ronde 2025, A5

Antwoord: B) 7
Uitwerking: We kunnen in twee zetten één hokje omlaag en één hokje naar links komen: zet eerst vier naar links en drie omhoog, en daarna drie naar rechts en vier naar beneden. Doe deze twee zetten drie keer, dan ben je in het punt $(-3, -3)$. Vanuit daar kun je in één zet in het punt (1, 0) komen: vier naar rechts en drie omhoog.

We laten zien dat minder dan zeven zetten niet kan. Van (0, 0) naar (1, 0) moet je evenveel omhoog als omlaag gaan. Dat kan door voor elke zet met 3 omhoog ook een zet met 3 omlaag te doen en voor elke zet met 4 omhoog ook een zet met 4 omlaag te doen. Een andere mogelijkheid is om vier keer 3 omhoog te gaan en drie keer 4 omlaag, of andersom. In het laatste geval heb je minstens zeven zetten nodig (dit gebeurt ook in de oplossing hierboven). Als je dus minder dan zeven zetten wilt gebruiken, dan moet je uitgaan van het eerste geval en dan komen de zetten in paren met evenveel beweging omhoog als omlaag. Ga je 4 omhoog en 4 omlaag, dan verplaats je horizontaal twee keer een afstand van 3. In totaal verplaats je dan een even aantal hokjes (0 of 6). Ga je 3 omhoog en 3 omlaag, dan verplaats je horizontaal 0 of 8 hokjes. Je verplaatst dus horizontaal altijd een even aantal hokjes en kan dan nooit op (1, 0) uitkomen.

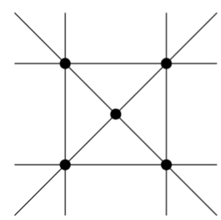
In totaal heb je dus minimaal zeven zetten nodig.

Opgave 5.6.
Xander tekent op een oneindig vel papier vijf punten en een aantal oneindig lange lijnen, op zo'n manier dat op elke lijn minstens twee van die punten liggen en dat de lijnen elkaar alleen snijden in punten die Xander heeft getekend.
Wat is het maximale aantal lijnen dat Xander getekend kan hebben?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Eerste ronde 2024, A5

Antwoord: D) 6
Uitwerking: We kunnen 6 lijnen als volgt krijgen. We nemen de verlengde zijden van een vierkant samen met de twee diagonalen. De 5 punten zijn nu de vier hoekpunten van het vierkant en het midden, zie ook de figuur hiernaast.



We zullen laten zien dat 7 (of meer) lijnen niet mogelijk zijn. Dat doen we uit het ongerijmde: neem aan dat een situatie met 7 lijnen wel bestaat. In het algemeen snijden 7 lijnen elkaar in $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ punten, maar er zijn twee redenen waardoor er minder kunnen zijn.

Ten eerste kunnen lijnen evenwijdig zijn, waardoor ze elkaar niet snijden. Omdat elke lijn ten minste 2 van de 5 punten moet bevatten, is het niet mogelijk dat er 3 lijnen evenwijdig zijn (want dan zouden er $3 \cdot 2 = 6$ punten nodig zijn). Van de 7 lijnen zijn er dus hooguit 3 paren die evenwijdig zijn, en dus hooguit 3 snijpunten minder door evenwijdigheid. Hierdoor blijven er ten minste $21 - 3 = 18$ snijpunten over.
Ten tweede kunnen snijpunten samenvallen. Dit gebeurt als er meer dan twee lijnen door één punt gaan. Als er 3 lijnen door één punt gaan, vallen er 3 snijpunten samen. Als er 4 lijnen door één punt gaan, vallen er 6 snijpunten samen, enzovoort. De minstens 18 overgebleven snijpunten moeten samenvallen in de 5 punten waarmee we begonnen. Dat betekent dat er een punt, zeg P, is waarin minstens 4 snijpunten samenvallen (want $5 \cdot 3 = 15 < 18$). Door dat punt gaan er dus ten minste 4 verschillende lijnen, zeg ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en ℓ_4.

Op elk van die 4 lijnen moet nog een ander van de 5 punten liggen, zeg punten P_1, P_2, P_3 en P_4. Deze punten kunnen niet samenvallen. Omdat we nu alle 5 punten al gevonden hebben, kan er geen vijfde lijn zijn die door het punt P gaat. Elk van de overige 3 lijnen snijdt ten minste 3 van de lijnen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en ℓ_4 (omdat hij met hooguit één van die lijnen evenwijdig is). Dat betekent dat de overige lijnen ten minste 3 van de punten P_1, P_2, P_3 en P_4 moeten bevatten. Hieruit volgt echter dat de 3 overige lijnen allemaal dezelfde lijn zijn, wat een tegenspraak is.

We concluderen dat 7 (of meer) lijnen niet mogelijk zijn en dat 6 het maximale aantal lijnen is.

Opgave 5.7.
Op een digitale klok lopen de tijdstippen van $00:00:00$ tot en met $23:59:59$. Het is mogelijk om vijf tijdstippen te maken die samen elk van de cijfers 0 t/m 9 precies driemaal gebruiken.
Wat is daarbij het grootst mogelijke tijdsverschil tussen het vroegste en het laatste tijdstip? *Het tijdsverschil tussen bijvoorbeeld* $08:34:16$ *en* $23:14:27$ *is* $14:40:11$.

Eerste ronde 2025, B2

Antwoord: $23:57:33$
Uitwerking: Merk op dat de uren altijd beginnen met 0, 1 of 2, en de minuten en seconden met 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Dat zijn al vijftien plekken waar cijfers 0 t/m 5 moeten staan, waarvan we er in totaal achttien beschikbaar hebben. Daarnaast geldt dat als we een uur met een 2 beginnen, het volgende cijfer dan ook uit 0 t/m 3 moet komen. Dat willen we in elk geval in het laatste tijdstip wel doen, anders is ons maximale tijdverschil minder dan 20 uur. De twee cijfers uit 0 t/m 5 die nog over zijn, kunnen we het beste in het vroegste tijdstip gebruiken. Het komt er dan zo uit te zien:

$$\begin{array}{ccc} 00 & : & 02:2X \\ 1X & : & 3X:3X \\ 1X & : & 4X:4X \\ 1X & : & 4X:5X \\ 23 & : & 5X:5X \end{array}$$

Merk op dat als we in het vroegste tijdstip een 1 gebruiken in plaats van een 2, één van de middelste tijdstippen met een 2 moet beginnen en daardoor een extra cijfer uit 0 t/m 3 nodig heeft. Dan wordt het vroegste tijdstip minimaal $00:06$ en dat is later dan hoe het hierboven staat. Het vroegst mogelijke tijdstip is dus $00:02:26$ en het laatst mogelijke tijdstip $23:59:59$. (In de middelste drie tijdstippen maakt de precieze plaatsing van de 3, 4, 5 niet uit.) Hoe we de cijfers 6 t/m 9 verder ook over de X'en verdelen, het geven altijd geldige tijdstippen. Het maximale tijdverschil is dus $23:59:59 - 00:02:26 = 23:57:33$.

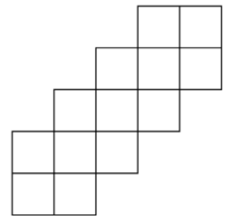
Deel III

Wiskunde Olympiade 2026

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2026

A-vragen

Opgave 1.
Op elk vakje van de figuur hiernaast ligt een stukje kaas. Een muis kiest een vakje uit om in te beginnen en loopt vervolgens steeds (na het eten van het stukje kaas) naar een buurvakje. (Twee vakjes zijn buren als ze een zijde gemeenschappelijk hebben.) Hij wil zoveel mogelijk stukjes kaas opeten, maar nooit op een vakje komen waar hij eerder al geweest is.
Hoeveel blokjes kaas kan hij maximaal opeten?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Opgave 2.
Dominostenen zijn rechthoekige stenen met twee getallen erop. Je kunt twee dominostenen tegen elkaar aan leggen als de getallen op de uiteinden gelijk zijn. Dus de stenen 2-5, 0-5 en 2-3 kunnen bijvoorbeeld als volgt in een rij achter elkaar gelegd worden: 3-2, 2-5, 5-0. Emre heeft de dominostenen 0-1, 0-4, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 4-5 en 4-6 gepakt. Hij wil zeven van deze acht dominostenen in een rij achter elkaar leggen.
Welke dominosteen moet Emre dan niet gebruiken?

A) 0-1 B) 2-3 C) 2-4 D) 2-5 E) 4-6

Opgave 3.
In een klas van vijftien leerlingen spreken een of meer leerlingen altijd de waarheid. De andere leerlingen spreken soms wel en soms niet de waarheid. De leerlingen weten wie altijd de waarheid spreekt. Het schoolhoofd vraagt elk van de leerlingen hoeveel leerlingen altijd de waarheid spreken. Ze krijgt de volgende vijftien antwoorden: "twee" (1 keer), "drie" (4 keer), "vier" (3 keer), "vijf" (2 keer) en "zes" (5 keer).
Hoeveel leerlingen spreken altijd de waarheid?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Opgave 4.
Vijf stoelen met de letters A t/m E erop staan in die volgorde in een kring. Vijf mensen genaamd A t/m E gaan op de stoelen zitten, ieder op een andere stoel, maar niet per se op de stoel met hun eigen letter. Er geldt:

- Persoon A zit op stoel D.
- Persoon B zit op een stoel direct naast stoel B.
- Persoon C zit op een stoel met een andere letter en de persoon met die letter zit juist op stoel C.
- Persoon E zit tussen persoon C en persoon D (zonder andere mensen ertussen).

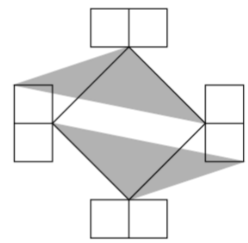
Op welke stoel zit persoon D?

A) stoel A B) stoel B C) stoel C D) stoel D E) stoel E

Opgave 5.
Een bak bevat rode, witte en blauwe ballen. Het totale aantal ballen in de bak is kleiner dan 100. Van elke kleur is er minstens één bal. Het aantal rode ballen is een even getal. Het aantal witte en blauwe ballen samen is 4 keer zo groot als het aantal rode ballen. Het aantal rode en blauwe ballen samen is 6 keer zo groot als het aantal witte ballen.
Hoeveel ballen zitten er in de bak?

A) 28 B) 30 C) 35 D) 70 E) 84

Opgave 6.
Peter wil een vlag ontwerpen voor zijn nieuwe wiskundeclub. Zijn huidige ontwerp bestaat uit een groot (gekanteld) vierkant met een oppervlakte van 100 en aan de vier hoekpunten overal een tweetal kleine vierkanten met zijdes parallel aan de diagonalen van het grote vierkant. De twee driehoeken aangegeven in de figuur wil hij graag rood kleuren. Peter maakt 9 ontwerpen met kleine vierkantjes die toenemen van 1×1 tot 9×9 (in welk geval ze elkaar overlappen).
Wat gebeurt er met de oppervlakte van de rode driehoeken?



A) die neemt steeds toe
B) die neemt steeds af
C) die neemt eerst toe en daarna weer af
D) die neemt eerst af en daarna weer toe
E) die is constant

Opgave 7.
Dascha maakt een getallenrij met de volgende eigenschappen:

- De rij is 100 getallen lang.
- De rij bevat alleen de getallen 1, 2, 3, 4, allemaal precies even vaak.
- Twee getallen die naast elkaar in de rij staan, verschillen minstens 2 van elkaar.

Hoeveel getallenrijen kan ze op deze manier maken?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 200 E) 2^{50}

Opgave 8.
Dana heeft een oneven getal van 1 cijfer. Ze gooit nu 2026 keer achter elkaar een muntje op en na elke worp doet ze een van de volgende dingen (met de computer):

- Kop: ze vermenigvuldigt haar getal met 2 en telt er dan 1 bij op, of
- Munt: ze vermenigvuldigt haar getal met 7 en telt er 6 bij op.

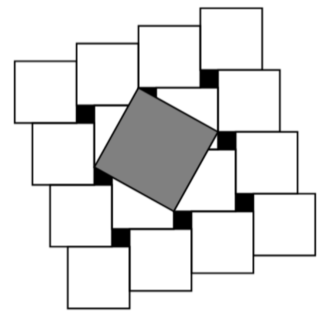
Ze komt uit op het enorme getal $646 \cdots 143$ van 625 cijfers.
Met welk getal was ze begonnen?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

B-vragen

Opgave 1.
Jasper kiest vijf getallen onder de honderd. Hij kiest de getallen zó dat de vijf getallen samen elk van de cijfers 0 tot en met 9 precies éénmaal bevatten en niet met een nul beginnen. Bovendien zijn de getallen allemaal deelbaar door 3 maar niet door 9. Er zijn meerdere manieren om dat te doen. Hij doet het zó dat de vijf getallen bij elkaar opgeteld een zo groot mogelijke uitkomst geven.
Wat is die uitkomst?

Opgave 2.
Een vloer is betegeld met vierkante tegels zoals in de figuur hiernaast. Alle witte tegels zijn even groot en alle zwarte tegels zijn even groot. De oppervlakte van een witte tegel is 92 en de oppervlakte van een zwarte tegel is 7. Op de vloer ligt ook een vierkante grijze tegel.
Wat is de oppervlakte van die grijze tegel?
Let op: de figuur is niet op schaal.



Opgave 3.
Het tijdstip twaalf over acht 's avonds op 20 december 2012 kunnen we schrijven als 20:12 op 20-12 in 2012. Het getal 2012 kan dus een tijdstip, een datum en een jaartal aangeven.
Hoeveel getallen van vier cijfers, die niet met een nul beginnen, kunnen op die manier een tijdstip, een datum en een jaartal aangeven?

Opgave 4.
In de piramide hiernaast staan de letters A tot en met I voor gehele getallen die groter zijn dan 1. Elke dubbele punt in een rij geeft een deling aan, waarvan de uitkomst in de rij daaronder staat. Dat betekent, bijvoorbeeld, dat $A : B = E$ en $B : C = F$. Onderaan in de piramide staat een 1. Verder is gegeven dat $B = 150$.
Wat is de waarde van G?

$$\begin{array}{c} A \;:\; B \;:\; C \;:\; D \\ E \;:\; F \;:\; G \\ H \;:\; I \\ 1 \end{array}$$