

Finaletraining Wiskunde Olympiade

Met uitwerkingen

Esther Bod, Birgit van Dalen, Julian Lyczak, Quintijn Puite, Merlijn Staps

Voor het schrijven van dit trainingsmateriaal hebben we inspiratie opgedaan uit materiaal van de Rijksuniversiteit Groningen, opgesteld door Jan Tuitman (juni 2003) en bewerkt door Wout de Goede (mei 2007) en Wim Berkelmans (Vrije Universiteit Amsterdam, augustus 2007), en materiaal van Hans Sterk (Technische Universiteit Eindhoven). We bedanken alle betrokkenen voor het beschikbaar stellen van hun materiaal.

Versie: 10 maart 2025

Website: www.wiskundeolympiade.nl

In deze bundel zijn van alle opgaven uitwerkingen te vinden. We raden je wel aan pas na het zelf proberen van een opgave de uitwerking erbij te pakken; dat is namelijk het meest leerzaam.

Er zijn vaak meerdere oplossingen mogelijk van een opgave. Kijk er dus niet raar van op als de uitwerking in deze bundel verschilt van jouw eigen oplossing.

Inhoudsopgave

1	Rijen, inductie en priemgetallen	1
1	Somformules voor rekenkundige en meetkundige rij	1
2	Inductie	7
3	Priemgetallen	16
4	Gemengde opgaven	23
2	Getaltheorie	31
5	Delers	31
6	Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11	38
7	Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud	43
8	Gemengde opgaven	50
3	Meetkunde	57
9	Hoeken	57
10	Congruentie en gelijkvormigheid	62
11	Driehoeken	68
12	Vierhoeken	74
13	Gemengde opgaven	80
4	Bewijsmethoden	89
14	Bewijs uit het ongerijmde	89
15	Handig tellen	95
16	Ladenprincipe	102
17	Extremenprincipe	107
18	Gemengde opgaven	112

Katern 1

Rijen, inductie en priemgetallen

1 Somformules voor rekenkundige en meetkundige rij

Iedereen kent de positieve gehele getallen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$. Dit heten ook wel de *natuurlijke getallen*. (In sommige boeken wordt ook 0 als een natuurlijk getal gezien, maar hier doen we dat niet.)

Als we daar 0 en de negatieve gehele getallen aan toe voegen, krijgen we de *gehele getallen*:
 $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Wil je 27 minimarsjes eerlijk verdelen over 18 personen, dan zie je na heel even nadenken dat je iedereen er anderhalf kan geven. Je had ook (zonder nadenken) meteen kunnen zeggen: dan krijgt iedereen er $\frac{27}{18}$. Dit is een voorbeeld van een breuk. De *rationale getallen* (of *breuken*) zijn de getallen van de vorm $\frac{t}{n}$ waarbij t een geheel getal is en n een geheel getal dat niet gelijk is aan 0 . We noemen t de *teller* en n de *noemer*. Een breuk laat zich op meerdere manieren schrijven. Zo is $\frac{27}{18}$ gelijk aan $\frac{3}{2}$, wat ook wel wordt geschreven als $1\frac{1}{2}$.

Alle getallen van de getallenlijn samen vormen de verzameling van de *reële getallen*. Daartoe behoren 5 , -3 en $\frac{27}{18}$, maar ook $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ en π . In katern 4 zullen we bewijzen dat $\sqrt{5}$ echt geen breuk is. Het is dus een reëel getal dat niet een rationaal getal is. Dat wordt wel een irrationaal getal genoemd.

Ten slotte nog wat terminologie. Een uitdrukking van de vorm $a + b$ heet een *som* en is het resultaat van de *optelling* van de *termen* a en b . Een uitdrukking van de vorm $a \cdot b$ (of ab of $a \times b$) heet een *product* en is het resultaat van de *vermenigvuldiging* van de *factoren* a en b .

1.1 Rekenkundige rij

We kunnen ook een hele *rij* getallen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ bij elkaar optellen; je krijgt dan de som $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$. De beroemde wiskunde Carl Friedrich Gauss (1777–1855) moest als jongetje van 10 ooit eens de getallen 1 tot en met 100 optellen. Hij wist binnen een paar seconden het antwoord. Hoe deed hij dat zo snel? De som die Gauss moest uitrekenen was

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Schrijf nu dezelfde som nog een keer op onder de oorspronkelijke uitdrukking, maar dan met de termen in omgekeerde volgorde.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

De eerste term van de eerste som opgeteld bij de eerste term van de tweede som is $1 + 100 = 101$. Tellen we de tweede term van beide sommen op, dan vinden we $2 + 99$ en dat is ook weer 101. En idem voor de derde term: $3 + 98 = 101$. Zo kunnen we alsmaar verder gaan. Er zijn in totaal 100 termen, dus op deze manier komen we op $100 \cdot 101$. Maar omdat we de oorspronkelijke uitdrukking nu in totaal twee keer hebben geteld, moeten we nog delen door 2. We concluderen dat

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050.$$

Zo kunnen we ook wel de getallen 1 tot en met 1000 optellen. Nu vinden we, als we de uitdrukking weer in omgekeerde volgorde onder zichzelf opschrijven, als som van twee termen boven elkaar $1 + 1000, 2 + 999, 3 + 998$, et cetera, wat telkens 1001 is. Er zijn in totaal 1000 termen, dus de som van de twee uitdrukkingen is $1000 \cdot 1001$, waaruit we concluderen dat

$$1 + 2 + 3 + \dots + 998 + 999 + 1000 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500500.$$

Door de getallen 100 en 1000 in bovenstaande twee voorbeelden te vervangen door de variabele n , krijgen we de algemene formule voor de som van de getallen 1 tot en met n . De som van een term en de term daaronder in de omgekeerde uitdrukking is telkens $n + 1$. Er zijn in totaal n termen, dus de som van tweemaal deze uitdrukking is $n \cdot (n + 1)$. Er geldt dus

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 1) + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een *rekenkundige rij*: een rij waarvan de afzonderlijke termen steeds een constante verschillen (in dit geval was

hier niet om een rekenkundige rij. Toch heeft deze rij termen ook een mooie eigenschap: elke term is steeds 2 keer zo groot als de vorige term. En daaruit volgt dat als je de uitdrukking met 2 vermenigvuldigt, je een andere uitdrukking krijgt die heel erg veel lijkt op de oorspronkelijke som. We noemen de som even S , dus

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}.$$

Dan geldt — als we alles met 2 vermenigvuldigen — dat

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n.$$

Als we deze twee uitdrukkingen nu van elkaar aftrekken, vinden we dat

$$\begin{array}{rcccccccc} 2S & = & & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\ S & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & & \\ \hline 2S - S & = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & 0 & + & 2^n \end{array}$$

Dus $S = 2^n - 1$.

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een *meetkundige rij*: een rij waarvan de opeenvolgende termen steeds een constante factor $r \neq 1$ van elkaar verschillen. We kunnen de som dan schrijven als $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = b + r \cdot b + r^2 \cdot b + \dots + r^{N-1} \cdot b$, waarbij N weer het aantal termen is, b de eerste term, en r de constante factor die ook wel de *reden* wordt genoemd. Hierboven was het blijkbaar slim om te kijken naar de waarde van $2S$ zodat alle termen ‘een plekje doorschuiven’. We kijken daarom nu naar $r \cdot S$:

$$r \cdot S = r \cdot b + r^2 \cdot b + r^3 \cdot b + \dots + r^N \cdot b.$$

Als we daar

$$S = b + r \cdot b + r^2 \cdot b + \dots + r^{N-1} \cdot b$$

van aftrekken, houden we over dat

$$(r - 1)S = r^N \cdot b - b.$$

Dus

$$S = \frac{r^N \cdot b - b}{r - 1} = \frac{a_{N+1} - a_1}{r - 1},$$

waarbij a_{N+1} de eerstvolgende term van de rij is als de rij nog een term meer had gehad.

1.3 Opgaven

Opgave 1. Geef een directe uitdrukking voor de volgende som in termen van n , waarbij n een gegeven natuurlijk getal is. Controleer steeds je gevonden antwoord door de genoemde som voor $n = 3$ met de hand uit te rekenen.

- (a) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$;
- (b) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + (2n)$;
- (c) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + (10n + 1)$.

Uitwerking.

- (a) Hier staat een rekenkundige rij met n termen, met eerste en laatste term 1 respectievelijk $(2n - 1)$. Dus de som is gelijk aan $\frac{1}{2}n \cdot (1 + (2n - 1)) = \frac{1}{2}n \cdot (2n) = n^2$. Controle: voor $n = 3$ gaat het om de som $1 + 3 + 5 = 9$, terwijl $n^2 = 3^2 = 9$; klopt.
- (b) Hier staat een rekenkundige rij met n termen, met eerste en laatste term 2 respectievelijk $(2n)$. Dus de som is gelijk aan $\frac{1}{2}n \cdot (2 + (2n)) = n(n + 1)$. Controle: voor $n = 3$ gaat het om de som $2 + 4 + 6 = 12$, terwijl $n(n + 1) = 3 \cdot 4 = 12$; klopt.
- (c) Hier staat een rekenkundige rij met $\frac{(10n+1)-1}{5} + 1 = 2n + 1$ termen, met eerste en laatste term 1 respectievelijk $10n + 1$. Dus de som is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot (2n + 1) \cdot (1 + (10n + 1)) = \frac{1}{2}(2n + 1)(10n + 2) = (2n + 1)(5n + 1)$. Controle: voor $n = 3$ gaat het om de som $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + 26 + 31 = 112$, terwijl $(2n + 1)(5n + 1) = 7 \cdot 16 = 112$; klopt.

□

Opgave 2. Geef een directe uitdrukking voor de volgende som in termen van n , waarbij n een gegeven natuurlijk getal is.

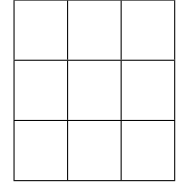
- (a) $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1}$;
- (b) $1 + 10 + 100 + \dots + 10^n$.

Uitwerking.

- (a) Als we, voor gegeven n , het linkerlid S met 3 vermenigvuldigen vinden we dat $3S = 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1} + 3^n$. Trekken we daar $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1}$ vanaf, dan houden we over dat $2S = 3S - S = (3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1} + 3^n) - (1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1}) = 3^n - 1$, dus $S = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.
- (b) We doen het nu direct met de formule: de volgende term zou 10^{n+1} zijn geweest, dus de som is gelijk aan $\frac{10^{n+1}-1}{10-1} = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)$.

□

Opgave 3. Van de negen vakjes van een 3×3 -bord kunnen we op verschillende manieren rechthoeken vormen. Allereerst zijn er de negen 1×1 -vierkantjes, de vier 2×2 -vierkantjes en het 3×3 -vierkant zelf. Daarnaast zijn er nog de volgende rechthoeken te maken: zes 1×2 en zes 2×1 ; drie 1×3 en drie 3×1 ; twee 2×3 en twee 3×2 . Dat zijn er in totaal 36.



Hoeveel rechthoeken bevat een 8×8 -bord?

Uitwerking. We nummeren de rijen en de kolommen van het 8×8 -bord zodat ieder vakje coördinaten (x, y) krijgt.

(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)

Een rechthoek wordt volledig bepaald door zijn rechterbovenhoek (p, q) en zijn linkeronderhoek (x, y) . In de figuur zie je op deze manier drie rechthoeken met rechterbovenhoek $(p, q) = (7, 4)$, namelijk die met linkeronderhoek $(x, y) = (3, 3)$, $(5, 3)$ of $(5, 1)$. In totaal kunnen we alle rechthoeken met rechterbovenhoek $(p, q) = (7, 4)$ vinden door als linkeronderhoek (x, y) te nemen waarbij $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ of 7 en waarbij $y = 1, 2, 3$ of 4 . Dat zijn 4×7 mogelijkheden. Analoog zien we dat er in het algemeen $q \times p$ mogelijke rechthoeken met rechterbovenhoek (p, q) zijn. We moeten dus al deze getallen $q \times p$ optellen. Dat doen we per rij.

In de onderste rij staan van links naar rechts achtereenvolgens de getallen $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 8$.

In totaal is dus de som van de eerste rij: $1 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

In de tweede rij is de som: $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

In de derde rij is de som: $3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

⋮

In de achtste rij ten slotte: $8 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

Totaal dus: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

Nu weten we dat $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{1}{2} \times 8 \times (1 + 8) = 36$, dus er zijn in totaal $36^2 = 1296$ rechthoeken. (Zie ook opgave B1 van de eerste ronde 2008.) □

Opgave 4 (Finale 2013). *Het getal S is de uitkomst van de volgende som:*

$$1 + 10 + 19 + 28 + 37 + \dots + 10^{2013}.$$

Als het getal S wordt uitgeschreven, hoe vaak komt het cijfer ‘5’ dan voor in het resultaat?

Uitwerking. *Om het idee te bepalen berekenen we eerst het aantal vijven in de uitkomst s van de som $1 + 10 + 19 + \dots + 100000$. Merk eerst op dat elke term in de som een negenvoud plus 1 is:*

$$s = 1 + (1 + 9) + (1 + 2 \cdot 9) + \dots + (1 + 11111 \cdot 9).$$

Het aantal termen in de som is $11111 + 1 = 11112$ en de gemiddelde waarde van een term is $\frac{1+100000}{2}$. Hieruit volgt dat $s = 11112 \cdot \frac{100001}{2} = \frac{11112}{2} \cdot 100001$.

Omdat $\frac{11112}{2} = \frac{5 \cdot 11112}{5 \cdot 2} = \frac{55560}{10} = 5556$ vinden we dat $s = 5556 + 555600000 = 555605556$. Het aantal vijven is in dit geval gelijk aan 6.

We lossen nu de eigenlijke opgave op. Merk op dat $10^{2013} = 1 + 9 \cdot 11 \dots 1$ (2013 enen). Noem voor het gemak $n = 11 \dots 1$ het getal bestaande uit 2013 enen. We zien dat de som

$$S = 1 + (1 + 9) + (1 + 2 \cdot 9) + \dots + (1 + n \cdot 9)$$

precies $n + 1$ termen heeft, met eerste term 1 en laatste term 10^{1023} . Dus $S = \frac{n+1}{2} \cdot (1 + 10^{2013})$.

Uitwerken van de breuk $\frac{n+1}{2}$ geeft:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5n+5}{10} = \frac{555\dots560}{10} = 555\dots56,$$

een getal met 2011 vijven gevolgd door een 6. Omdat de laatste 2013 cijfers van het getal $10^{2013} \cdot \frac{n+1}{2}$ allemaal nullen zijn, is er geen ‘overlap’ tussen de niet-nullen van $\frac{n+1}{2}$ en $10^{2013} \cdot \frac{n+1}{2}$. We vinden nu dat

$$\begin{aligned} S &= \frac{n+1}{2} \cdot (1 + 10^{2013}) \\ &= \frac{n+1}{2} + 10^{2013} \cdot \frac{n+1}{2} \\ &= 55\dots56055\dots56. \end{aligned}$$

Dus S is een getal dat precies $2011 + 2011 = 4022$ vijven bevat. □

2 Inductie

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

We gaan nu op een alternatieve manier bewijzen dat deze bewering geldt.

Voor $n = 5$ staat hier dat $1+2+4+8+16 = 32 - 1$ en voor $n = 6$ dat $1+2+4+8+16+32 = 64 - 1$, en dat klopt allebei. Hadden we deze laatste gelijkheid nou ook kunnen afleiden uit de eerste? Jazeker, ga maar eens uit van $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1$ en tel hier aan beide kanten 32 bij op, dan krijg je $(1+2+4+8+16)+32 = 32+32-1 = 64-1$ en dat is precies de uitdrukking voor $n = 6$. En als we bij deze gelijkheid aan beide kanten 64 optellen, komen we uit op de bewering voor $n = 7$ (weer eentje hoger): $1+2+4+8+16+32+64 = 64+64-1 = 128-1$.

Wat gebeurt hier nu precies? Laten we de $n = 5$ uit bovenstaand voorbeeld even $n = k$ noemen, waarbij k een willekeurig natuurlijk getal is. Stel dat je al weet dat $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Dan mogen we daar aan beide kanten 2^k bij optellen en krijgen we $(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1}) + 2^k = 2^k + 2^k - 1$. Maar $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, dus hier staat nu $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$. En dat is precies de bewering voor n 'eentje hoger', oftewel, voor $n = k + 1$. We hebben in de voorgaande zinnen dus bewezen dat als de gelijkheid geldt voor $n = k$, hij dan ook geldt voor $n = k + 1$. Kortom, als hij geldt voor $n = 1$, dan ook voor $n = 2$, en dan automatisch ook voor $n = 3$, en dan ook voor $n = 4$, etc. We hoeven dus nog maar één ding te laten zien: dat hij ook daadwerkelijk geldt voor $n = 1$. Maar dat is in dit geval simpel: vul maar in $n = 1$ en kijk of het klopt. Voor $n = 1$ loopt de rij links door tot $2^0 = 1$, dus de eerste term is tevens de laatste term en de som daarvan is 1. Aan de rechterkant staat er $2^n - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Aan beide kanten van het $=$ -teken komt er dus hetzelfde uit. Dus voor $n = 1$ klopt de bewering in ieder geval, en daarmee ook voor alle grotere n .

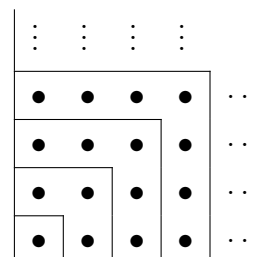
Deze uitwerking is een voorbeeld van een inductief bewijs. Als we een gelijkheid bewijzen voor $n = 1$ en als we er bovendien in slagen om uit de gelijkheid voor $n = k$ diezelfde gelijkheid voor $n = k + 1$ af te leiden, dan moet het wel zo zijn dat de gelijkheid voor alle n geldt. Deze redenering heet met een deftig woord: *volledige inductie* of *inductie* naar n . De tijdelijke aanname dat de gelijkheid geldt voor $n = k$ (om daaruit af te leiden dat hij ook geldt voor $n = k + 1$) heet de *inductiehypothese* en wordt soms genoteerd als IH.

Je zou dit kunnen vergelijken met een rij dominosteentjes. Als je steentje 1 omver duwt, valt steentje 2 ook om. En daarom ook steentje 3. En daarom ook steentje 4. De bouwers hebben ervoor gezorgd dat als een willekeurig steentje omvalt, hij de volgende ook omver duwt. Dat is dus de stap van $n = k$ naar $n = k + 1$, zeg maar de doorgeefstap. Om het geheel in beweging te zetten hoeven we alleen nog maar een duwtje tegen dominosteen $n = 1$ te geven, dan valt wegens de doorgeefstap ook steentje $n = 2$, dus wegens de volgende doorgeefstap ook steentje $n = 3$, et cetera. In de wiskunde noemen we de doorgeefstap normaliter de *inductiestap*; het eerste zetje heet juist de *inductiebasis*. Dat eerste zetje hoeft trouwens niet $n = 1$ te zijn, maar kan bijvoorbeeld ook $n = 0$ zijn of $n = 4$ (zoals in voorbeeld 2).

In het bewijs hierboven werkte het om er links en rechts 2^k bij op te tellen. Maar soms

moet je hele andere dingen doen om uit de veronderstelling dat de gelijkheid geldt voor $n = k$ af te kunnen leiden dat hij ook geldt voor $n = k + 1$. Het zou ook kunnen dat je er links en rechts juist iets moet afhalen, of dat je links en rechts alles met factor 10 moet vermenigvuldigen, of dat je links en rechts het kwadraat moet nemen, of ...

Vaak kun je door inductie een intuïtief idee hard maken. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar opgave 1(a). Voor $n = 3$ staat daar $1 + 3 + 5 = 3^2$ en dat zouden we ons kunnen voorstellen als 1 en 3 en 5 knikkers die samen in een 3×3 -vierkant liggen. Het is ‘logisch’ dat als we nu 7 knikkers toevoegen, we een 4×4 -vierkant verkrijgen. En zo alsmaar verder. Om dit laatste zinnetje ‘en zo alsmaar verder’ wiskundig te verantwoorden, gebruiken we inductie. Zie het volgende voorbeeld.



Voorbeeld 1. *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Oplossing. We gaan deze opgave dus nu met inductie doen.

(Inductiebasis) We kijken eerst maar eens of het voor $n = 1$ geldt. Dan staat er links de som van 1 tot en met 1 en daarmee wordt dus alleen het getal 1 bedoeld. Rechts staat dan 1^2 en dat is ook 1. Dus dan geldt de gelijkheid. We zouden het nu ook even voor een paar andere waarden kunnen uitrekenen en vergelijken, maar voor ons bewijs met inductie hebben we aan één duwtje genoeg.

(Inductiestap) Stel dat het voor zekere $n = k \geq 1$ geldt, dus stel dat $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$. Hoe kunnen we dit gebruiken als we willen bewijzen dat het ook voor $n = k + 1$ geldt, oftewel dat $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$? Aan de linkerkant is er dan een term $(2k + 1)$ bijgekomen dus laten we dat rechts ook maar doen. Dan volgt uit $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ dat $(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$. Maar dat laatste is op zijn beurt weer $(k + 1)^2$. We concluderen dat dan dus blijkbaar geldt dat $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$, precies wat we wilden bewijzen. Met inductie concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. \square

Merk op dat het heel belangrijk is om met woorden de structuur van je bewijs goed weer te geven. Er is allereerst een bewering die bewezen moet worden; meestal is deze al gegeven in de opgave. Bij de inductiebasis reken je de linkerkant en de rechterkant apart uit en kijk je of er hetzelfde uitkomt; zo ja, dan heb je de inductiebasis bewezen. Bij de inductiestap schrijf je vervolgens de inductiehypothese op en zeg je erbij dat je daar nu vanuit mag gaan. Daarnaast is het nuttig om alvast de te bewijzen bewering voor $n = k + 1$ uit te schrijven, zodat je weet wat je doel is. Zet daar wel heel duidelijk bij dat die bewering dus juist “te bewijzen” is. Vaak krijg je dan wel het idee hoe je van de uitdrukking voor $n = k$ op die voor $n = k + 1$ kan komen. Bedenk goed wat de ophoging van n betekent: in geval van de som van een rij komt dat neer op de volgende term erbij optellen (zoals in bovenstaand

voorbeeld). Maar in geval van $n!$ betekent n ophogen van $n = k$ naar $n = k + 1$ dat je de uitdrukking juist vermenigvuldigt met $k + 1$.

Het kan ook voorkomen dat je eerst nog zelf de bewering goed rond moet krijgen. Bijvoorbeeld als de vraag was geweest: bereken voor gegeven natuurlijk getal n een directe uitdrukking voor de rij $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$. Als je de methode van Gauss nog niet had gekend, had je als volgt te werk kunnen gaan. Je rekt de som van de rij uit voor de eerste paar kleine waarden van n , bijvoorbeeld $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Je ziet dat er achtereenvolgens $1, 4, 9, 16, 25$ uitkomt. Daardoor kun je het vermoeden krijgen dat altijd wel zal gelden dat $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Dat kun je dan vervolgens met inductie bewijzen, zoals we in bovenstaand voorbeeld hebben gedaan.

De voorbeelden hierboven zijn gelijkheden: beweringen van de vorm ‘iets is gelijk aan iets anders’. Maar met inductie kun je ook andere beweringen bewijzen dan alleen maar gelijkheden. Bijvoorbeeld: ‘iets is kleiner dan iets anders’; ‘iets is deelbaar door iets anders’, et cetera. Hier twee voorbeelden.

Voorbeeld 2. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 4$ geldt dat $2^n + 5 > 5n$.*

Oplossing. Een tabel komt al erg overtuigend over; de linkerkant groeit nou eenmaal veel harder (exponentieel) dan de rechterkant (lineair). Toch moeten we het wiskundig nog netjes bewijzen. We doen dat met inductie naar n . Omdat we het pas hoeven te bewijzen vanaf $n = 4$ beginnen we daar.

(Inductiebasis) Voor $n = 4$ geldt $2^n + 5 = 21$ en $5 \cdot n = 20$, dus dan klopt het.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 4$. Er geldt dan dus sowieso dat $2^k + 5 > 5k$. Bovendien geldt er, wegens $k \geq 4$, dat $2^k \geq 2^4 = 16 > 5$. Als we dat nou combineren vinden we dat

$$2^{k+1} + 5 = 2 \cdot 2^k + 5 = (2^k + 5) + 2^k > 5k + 2^k > 5k + 5 = 5(k + 1).$$

Maar daar staat precies onze bewering voor $n = k + 1$. We concluderen dat de ongelijkheid voor alle natuurlijke getallen n vanaf de 4 geldt. \square

Voorbeeld 3. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$ deelbaar is door 11 (dat wil zeggen: een 11-voud is).*

Oplossing. We bewijzen dit met inductie.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ komt er $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1} = 3^4 + 7 \cdot 5^0 = 88$ uit, en dat is inderdaad deelbaar door 11.

(Inductiestap) De inductiehypothese luidt: stel $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1}$ is een 11-voud. Dan kun je dat dus schrijven als $11 \cdot c$ voor zekere gehele c , dus $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1} = 11c$. Wat betekent dit nu voor de volgende waarde? Voor $n = k + 1$ komt er te staan $3^{3(k+1)+1} + 7 \cdot 5^{(k+1)-1}$ en dat is wegens de regels voor de machten hetzelfde als

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot 7 \cdot 5^{k-1}.$$

Wegens de inductiehypothese geldt $7 \cdot 5^{k-1} = 11c - 3^{3k+1}$ en als we dat hierin invullen krijgen we

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot (11c - 3^{3k+1}) = 22 \cdot 3^{3k+1} + 55c = 11 \cdot (2 \cdot 3^{3k+1} + 5c)$$

en dat is duidelijk een 11-voud.

Omdat de bewering bovendien geldt voor $n = 1$, geldt hij wegens inductie dus voor alle natuurlijke getallen n . \square

Een tip bij de opgaven: werk niet meer haakjes uit dan strikt noodzakelijk, maar werk liefst zoveel mogelijk met gemeenschappelijke factoren. Als je bijvoorbeeld in je berekening stuit op $n(n+5) + 3(n+5)$ zou je de haakjes kunnen gaan uitwerken, maar het is vaak veel gemakkelijker om de gemeenschappelijk factor $(n+5)$ buiten haakjes te halen en dit te herschrijven tot $(n+3)(n+5)$. Dat kan aanzienlijk schelen in het rekenwerk, dus we geven het graag als tip bij de volgende opgaven mee.

Bij de eerste opgaven staat nog expliciet erbij dat je ze “met inductie” moet bewijzen. Maar bij de latere opgaven bepaal jij bij het eraan werken wel of je het met inductie gaat doen of niet. In dit hoofdstuk is de tip natuurlijk om het wel met inductie te proberen, maar bij geen enkele finale-opgave zul je worden verplicht om het per se met inductie aan te pakken. Als je het wel met inductie doet, vermeld dat dan en splits je uitwerking op in een inductiebasis en een inductiestap.

2.1 Opgaven

Opgave 5. *Bij opgave 2(a) heb je gezien dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Bewijs deze bewering nogmaals, maar ditmaal met inductie.

Uitwerking. (Inductiebasis) Voor $n = 1$ is het duidelijk: links staat dan 1 en rechts staat dan $\frac{1}{2}(3^1 - 1)$ en dat is ook 1.

(Inductiestap) Stel dat het voor zekere $n = k \geq 1$ geldt, dus stel dat $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{k-1} = \frac{1}{2}(3^k - 1)$. Daaruit volgt dat $(1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{k-1}) + 3^k = \frac{1}{2}(3^k - 1) + 3^k = \frac{1}{2}(3^k - 1 + 2 \cdot 3^k) = \frac{1}{2}(3 \cdot 3^k - 1) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$ en dat is precies de bewering voor $n = k + 1$. Met inductie concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. \square

Opgave 6. *Aan een schaaktoernooi doen $n \geq 2$ spelers mee. Elke twee spelers spelen precies één keer tegen elkaar. Bewijs met inductie dat er in totaal $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ wedstrijden gespeeld worden.*

Uitwerking. (Inductiebasis) Voor $n = 2$ hoeft er maar 1 wedstrijd te worden gespeeld. Dat is ook precies de uitkomst van $\frac{1}{2}(2^2 - 2)$.

(Inductiestap) Stel dat de bewering geldt voor $n = k \geq 2$. Dus k spelers doen in totaal $\frac{1}{2}(k^2 - k)$ wedstrijden. Als er nu een $(k + 1)^{\text{ste}}$ speler bij komt, moet hij nog tegen iedereen spelen. Er komen dan dus k wedstrijden bij. Dat zijn er in totaal $\frac{1}{2}(k^2 - k) + k$, of te wel $\frac{1}{2}(k^2 + k)$. De vraag is of dit gelijk is aan $\frac{1}{2}((k + 1)^2 - (k + 1))$. Het antwoord is ja: $\frac{1}{2}((k + 1)^2 - (k + 1)) = \frac{1}{2}(k + 1)((k + 1) - 1) = \frac{1}{2}(k + 1)k = \frac{1}{2}(k^2 + k)$. \square

Opgave 7. *Bewijs dat $2 \cdot 3^n > 7n + 3$ voor alle gehele getallen $n \geq 2$.*

Uitwerking. We bewijzen dit met inductie naar n .

(Inductiebasis) Voor $n = 2$ staat er $18 > 17$ en dat is waar.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 2$. Er geldt $4 \cdot 3^k \geq 36 > 7$, dus

$$2 \cdot 3^{k+1} = 2 \cdot 3^k + 4 \cdot 3^k \stackrel{\text{IH}}{>} 7k + 3 + 4 \cdot 3^k > 7k + 3 + 7 = 7(k + 1) + 3.$$

en dat is de bewering voor $n = k + 1$. We concluderen dat de ongelijkheid voor alle natuurlijke getallen n vanaf de 2 geldt. \square

Opgave 8. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + n \cdot (n + 3) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 5).$$

Uitwerking. Inductie naar n .

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ staat er links maar één term, namelijk $1 \cdot 4$. Rechts staat $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6$. Beide kanten zijn gelijk aan 4.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + k \cdot (k + 3) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 5)$ (IH). Dan komt er in de volgende stap links een term bij: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + k \cdot (k + 3) + (k + 1) \cdot (k + 4)$. We moeten bewijzen dat deze uitdrukking gelijk is aan $\frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 6)$. Wel, het linkerlid kunnen we met behulp van de inductiehypothese als volgt herschrijven:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + k \cdot (k + 3) + (k + 1) \cdot (k + 4) \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 5) + (k + 1) \cdot (k + 4),$$

wat we verder kunnen omschrijven tot $\frac{1}{3}(k + 1)(k(k + 5) + 3(k + 4)) = \frac{1}{3}(k + 1)(k^2 + 8k + 12) = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 6)$ en dat is precies het rechterlid dat we zochten.

Met inductie concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. \square

Opgave 9. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4.*

Uitwerking. We bewijzen dit met inductie naar n .

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt: $7^1 + 3^2 = 16$ en dat is een 4-voud, dus okay.

(Inductiestap) Stel dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$. Dan is $7^k + 3^{k+1}$ is een 4-voud, zeg $7^k + 3^{k+1} = 4q$ voor zekere gehele q . Dus $7^{k+1} + 3^{k+2} = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 4 \cdot 7^k + 3 \cdot (7^k + 3^{k+1}) = 4 \cdot 7^k + 3 \cdot 4q$ en dat is duidelijk weer een viervoud. Dus dan geldt het voor $n = k + 1$. We concluderen wegens inductie dat de bewering voor alle natuurlijke getallen n geldt. \square

Opgave 10 (Finale 2023). *In een kamer staan 2023 vazen genummerd van 1 tot en met 2023. In elke vaas willen we een briefje stoppen met daarop een positief geheel getal uit de rij $1, 2, \dots, 2023$. De getallen op de briefjes hoeven niet verschillend te zijn. Voor elke vaas moet nu het volgende gelden. Kijk op het briefje dat in de vaas zit, zoek de (niet noodzakelijk verschillende) vaas met het nummer dat op het briefje staat, en kijk op het briefje dat in deze vaas zit. Dan moet het gemiddelde van de getallen op de twee briefjes precies gelijk zijn aan het nummer van de eerst gekozen vaas. Bijvoorbeeld, als we in vaas 13 een briefje met het getal 5 stoppen, dan moet in vaas 5 een briefje komen met het getal 21 erop: immers, het gemiddelde van 5 en 21 is 13.*

Bepaal alle mogelijke manieren om iedere vaas van een briefje te voorzien.

Uitwerking. Een mogelijke manier om de vazen met briefjes te vullen is om in vaas 1 een briefje met 1 te doen, in vaas 2 een briefje met 2, in vaas 3 een briefje met 3, \dots , en in vaas 2023 een briefje met 2023. We zullen met behulp van volledige inductie laten zien dat dit de enige verdeling is. Merk op dat voor een geldige verdeling het niet uit maakt in welke volgorde we de vazen vullen.

Bekijk vaas 1. Stel dat je hier een briefje in doet met a . In vaas a komt dan een briefje met b waarvoor geldt dat $(a+b)/2 = 1$ oftewel $a+b = 2$. Aangezien a en b positieve gehele getallen zijn, moet wel gelden dat $a = b = 1$. De twee vazen waren hier dus hetzelfde en in vaas 1 komt een briefje met 1.

Voor de inductiestap nemen we aan dat de eerste $n - 1$ vazen elk een briefje bevatten met het nummer van de vaas. We willen laten zien dat we in vaas n een briefje moeten doen met n . Stel dat in vaas n een briefje komt met a . Als $a < n$, dan zit in vaas a ook een briefje met a vanwege de inductiehypothese. Er moet dan gelden dat $(a+a)/2 = n$, maar dat is een tegenspraak met $a < n$. We concluderen dat $a \geq n$.

Als $a > n$, dan weten we nog niet welk getal er op het briefje komt in vaas a . Noem dit getal b . Dan moet gelden dat $(a+b)/2 = n$, en dus is $b < n$. Maar dan vinden we een tegenspraak als we als eerste vaas a zouden bekijken: daarin vinden we een briefje met b , en in vaas b vinden we vervolgens, vanwege de inductiehypothese, weer een briefje met b . Echter is $(b+b)/2 \neq a$, want $a > n$ en $b < n$.

We concluderen dat $a = n$ moet gelden: ook in vaas n komt een briefje met n erop. Volledige inductie geeft nu dat in iedere vaas een briefje komt met daarop het nummer van de

vaas. Dus dit is de enige mogelijke verdeling van de briefjes. \square

Opgave 11. Voor een rij natuurlijke getallen a_1, a_2, a_3, \dots geldt

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 2$,
- $a_{n+2} = a_n^2 + 2a_{n+1}$ voor $n \geq 1$.

Bewijs dat a_{2n+1} oneven is voor alle gehele getallen $n \geq 0$.

Uitwerking. (Inductiebasis) Voor $n = 0$ moeten we kijken naar a_1 en die is 1, dus oneven. (Inductiestap) Stel dat de bewering geldt voor $n = k \geq 0$, dus a_{2k+1} is oneven. Dan $a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = a_{2k+1}^2 + 2a_{2k+2}$. De tweede term is even wegens de factor 2 terwijl de eerste term oneven is als kwadraat van een getal dat per inductiehypothese oneven is. Daarmee is de som (oneven + even) ook oneven, dus $a_{2(k+1)+1}$ is oneven. En dat is precies de bewering voor $n = k + 1$. \square

Opgave 12. Een aantal steden is verbonden door éénrichtingsverkeerwegen. Tussen elk tweetal steden loopt een directe weg (de ene kant op of de andere kant op). Bewijs dat er een stad is die te bereiken is vanuit alle andere steden (eventueel via andere steden).

Uitwerking. (Inductiebasis) Als er maar één stad is, is het triviaal; die stad is te bereiken uit alle andere steden want er zijn geen andere steden.

Als je dit een beetje vreemde redenering vindt, begin dan gewoon bij $n = 2$. Tussen de twee steden loopt een éénrichtingsverkeerweg, zeg van A naar B . Dan is B vanuit alle andere steden (namelijk A) te bereiken.

(Inductiestap) Veronderstel dat we dit al bewezen hebben voor elk netwerk van $n = k$ steden met éénrichtingsverkeerwegen daartussen. We kijken nu naar een netwerk van $n = k + 1$ steden. We kiezen een van de steden uit (zeg de hoofdstad H) en laten die even weg, evenals alle wegen die van of naar H lopen. Dan hebben we weer een netwerk van k steden en daarvan weten we per inductiehypothese dat er een stad is (zeg B) die vanuit alle andere steden te bereiken is. Nu kijken we weer naar ons netwerk met H erbij. Er is een weg tussen B en H (want tussen elk tweetal steden). Als die weg van H naar B loopt, dan is B ook in dit grotere netwerk nog steeds de stad die vanuit alle andere steden te bereiken is. Als die weg echter van B naar H loopt, dan is juist H een stad die vanuit alle andere steden te bereiken is, namelijk via B . \square

Opgave 13. Voor een rij reële getallen x_1, x_2, x_3, \dots geldt $x_1 > \frac{1}{2}$ en

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}.$$

Bewijs dat voor alle natuurlijke n geldt $x_n > \frac{1}{2}$.

Uitwerking. (Inductiebasis) Voor $n = 1$ is de bewering waar wegens het gegeven. (Inductiestap) Stel dat de bewering geldt voor $n = k \geq 1$, dus $x_k > \frac{1}{2}$. Dan $x_k - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$ dus $\sqrt{x_k - \frac{1}{4}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$, oftewel $x_{k+1} > \frac{1}{2}$. Dat is precies de bewering voor $n = k + 1$. \square

Opgave 14 (Finale 2019). De rij van Fibonaccigetallen F_0, F_1, F_2, \dots wordt gedefinieerd door $F_0 = F_1 = 1$ en $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor alle $n \geq 0$. Zo hebben we dus bijvoorbeeld

$$F_2 = F_0 + F_1 = 2, \quad F_3 = F_1 + F_2 = 3, \quad F_4 = F_2 + F_3 = 5 \quad \text{en} \quad F_5 = F_3 + F_4 = 8.$$

De getallenrij a_0, a_1, a_2, \dots wordt gedefinieerd door

$$a_n = \frac{1}{F_n F_{n+2}} \quad \text{voor alle } n \geq 0.$$

Bewijs dat voor alle $m \geq 0$ geldt:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m < 1.$$

Uitwerking. Merk op dat we voor alle $n \geq 0$ het getal a_n als volgt kunnen herschrijven:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{F_n F_{n+2}} \\ &= \frac{F_{n+1}}{F_n F_{n+2}} \cdot \frac{1}{F_{n+1}} \\ &= \frac{F_{n+2} - F_n}{F_n F_{n+2}} \cdot \frac{1}{F_{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{F_n} - \frac{1}{F_{n+2}} \right) \cdot \frac{1}{F_{n+1}} \\ &= \frac{1}{F_n F_{n+1}} - \frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}. \end{aligned}$$

We vinden nu dat voor elke $m \geq 0$ de som $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m$ gelijk is aan

$$\left(\frac{1}{F_0 F_1} - \frac{1}{F_1 F_2} \right) + \left(\frac{1}{F_1 F_2} - \frac{1}{F_2 F_3} \right) + \left(\frac{1}{F_2 F_3} - \frac{1}{F_3 F_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{F_m F_{m+1}} - \frac{1}{F_{m+1} F_{m+2}} \right).$$

In deze som vallen alle termen tegen elkaar weg, behalve de eerste en de laatste. We vinden zo dat

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = \frac{1}{F_0 F_1} - \frac{1}{F_{m+1} F_{m+2}} = 1 - \frac{1}{F_{m+1} F_{m+2}} < 1.$$

Om op een oplossing te komen, kun je beginnen met het maken van een tabel met voor $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ de waarden van a_m en ook de waarden van $a_0 + \dots + a_m$. Probeer een patroon te ontdekken in de waarden van $a_0 + \dots + a_m$, bijvoorbeeld dat $a_0 + \dots + a_m = 1 - \frac{1}{F_{m+1}F_{m+2}}$. Dit kun je op een slimme manier rechtstreeks bewijzen, zoals in de oplossing hierboven, maar het is ook mogelijk om dit met inductie naar m te bewijzen. \square

3 Priemgetallen

De *delers* van een geheel getal, bijvoorbeeld 50, zijn de gehele getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de delers van 50 zijn 1, 2, 5, 10, 25, 50 en ook $-1, -2, -5, -10, -25, -50$. In dit hoofdstuk bekijken we alleen positieve delers. Sommige natuurlijke getallen hebben heel veel delers, sommige maar heel weinig. Hier een tabel van de eerste tien natuurlijke getallen en al hun positieve delers:

n	de positieve delers van n	
1	1	—
2	1, 2	priem
3	1, 3	priem
4	1, 2, 4	samengesteld
5	1, 5	priem
6	1, 2, 3, 6	samengesteld
7	1, 7	priem
8	1, 2, 4, 8	samengesteld
9	1, 3, 9	samengesteld
10	1, 2, 5, 10	samengesteld

Alle natuurlijke getallen zijn in ieder geval deelbaar door 1 en door zichzelf. De natuurlijke getallen groter dan 1 die als positieve delers *alleen* 1 en zichzelf hebben, heten *priemgetallen*. Een natuurlijk getal dat nog meer positieve delers heeft (dan 1 en zichzelf), heet *samengesteld*. Volgens afspraak valt 1 buiten de boot; hij is noch priem noch samengesteld.

In termen van delers kunnen we dus zeggen dat de priemgetallen precies de natuurlijke getallen zijn met exact twee positieve delers, en dat de samengestelde getallen precies de natuurlijke getallen zijn met meer dan twee positieve delers. Het getal 1 is het enige natuurlijke getal met maar één positieve deler.

Voorbeeld 4. Ga na voor welke natuurlijke getallen n het getal $4^n - 1$ priem is.

Oplossing. Voor een gegeven natuurlijk getal n kunnen we $4^n - 1$ ontbinden in factoren: $4^n - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$. We zouden nu wellicht in de verleiding kunnen

komen om te zeggen dat $4^n - 1$ altijd samengesteld is. Toch zit hier een addertje onder het gras: een van de factoren zou 1 kunnen zijn. En laat dat nou net bij $n = 1$ het geval zijn. De conclusie luidt dat $4^n - 1$ voor alle gehele getallen $n \geq 2$ een samengesteld getal is, maar voor $n = 1$ priem. \square

Elk natuurlijk getal groter dan 1 is op een unieke manier te schrijven als product van priemgetallen¹. Dat noemen we de *priemontbinding* van n . (Daarbij beschouwen we verschillende volgordes van dezelfde priemfactoren als hetzelfde: $6 = 2 \cdot 3$ en $6 = 3 \cdot 2$ stellen dezelfde priemontbinding voor van 6 en dit is dus de unieke priemontbinding van 6.) Zo is bijvoorbeeld $4200 = 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Het zal vaak handig blijken om ook het getal 1 een unieke priemontbinding te geven, namelijk het product van nul priemgetallen (het lege product).

Als een natuurlijk getal een 3-voud is, weten we dat het van de vorm $3k$ is voor zekere gehele k en dat het dus de priemfactor 3 moet bevatten (ten minste één maal). Omgekeerd zijn natuurlijk alle getallen die priemfactor 3 bevatten een 3-voud. De positieve 3-vouden zijn dus *precies* de natuurlijke getallen waarbij priemfactor 3 in hun priemontbinding voorkomt. Een zelfde redenering leidt — wegens $50 = 2 \cdot 5^2$ — tot de constatering dat de positieve 50-vouden precies de natuurlijke getallen zijn die priemfactor 2 bevatten (ten minste één keer) en die priemfactor 5 (ten minste) 2 keer bevatten. Op zo'n manier kun je ook naar 6-vouden, 8-vouden, 30-vouden, ... kijken.

Bij de vraag of een bewering al dan niet geldt, kun je het óf proberen te bewijzen, óf door middel van een tegenvoorbeeldje laten zien dat het niet zo is. Hoe werkt dat, een *tegenvoorbeeldje*? Iemand beweert bijvoorbeeld dat alle veelvouden van 15 ook deelbaar zijn door 6. Jij vindt van niet en overtuigt hem met een tegenvoorbeeld: “Kijk maar naar het getal 45, dat is wel een veelvoud van 15 (namelijk $3 \cdot 15$) maar het zit niet in de tafel van 6 ($45 = 7\frac{1}{2} \cdot 6$).” Bij tegenvoorbeelden gaat het erom om er één te vinden waarvoor de bewering niet klopt. Hier is dat dus het geval met 45, maar je had ook 15 zelf of 75 ofzo kunnen kiezen. Maar je had niet 60 kunnen kiezen; dat is namelijk toevallig een getal waarvoor de bewering wel klopt: het is een veelvoud van 15 en (toevallig) ook een veelvoud van 6.

We hebben in het begin van dit hoofdstuk gekeken naar de positieve delers van de getallen 1 tot en met 10. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar de positieve delers van 50. Dat zijn precies de natuurlijke getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de positieve delers van 50 zijn 1, 2, 5, 10, 25, 50. Maar hebben deze delers nog iets met de priemfactorontbinding van 50 (als $2^1 \cdot 5^2$) te maken?

Laten we eens kijken naar zo'n positieve deler van 50, zeg d . Omdat het een deler is, moet er dus een natuurlijk getal k zijn (in feite ook weer een deler) zodat $d \cdot k = 50$. Als we

¹Dit heet formeel de Hoofdstelling van de Rekenkunde. Het voert te ver om deze stelling hier te bewijzen.

nu van d de priemfactorontbinding weten, zijn we al een eind op weg met het opschrijven van de priemfactorontbinding van 50. Immers, alle priemfactoren van d zitten ook in 50. Zo'n deler moet dus wel van de vorm $2^x \cdot 5^y$ zijn, waarbij x gelijk aan 0 of 1 is en waarbij y gelijk aan 0, 1 of 2 mag zijn. (Daarbij correspondeert de deler 1 met de schrijfwijze $2^0 \cdot 5^0$.) Omgekeerd is elk getal van deze vorm overduidelijk ook een deler van 50. Dus alle positieve delers van 50 zijn precies alle getallen van deze vorm! Voor x zijn er daarbij 2 opties en voor y zijn er 3 opties. Het is dus best logisch dat het getal 50 precies $2 \times 3 = 6$ positieve delers heeft.

3.1 Opgaven

Opgave 15. (a) *We weten: als een geheel getal deelbaar is door 6, dan is het deelbaar door 2 en door 3. Geldt dit ook andersom?*

(b) *We weten: als een geheel getal deelbaar is door 8, dan is het deelbaar door 2 en door 4. Geldt dit ook andersom?*

(c) *We weten: als een geheel getal deelbaar is door 30, dan is het deelbaar door 6 en door 15. Geldt dit ook andersom?*

Uitwerking.

(a) Ja: als n priemfactor 2 en priemfactor 3 bevat, dan ook factor 6.

(b) Nee; we geven een tegenvoorbeeld. Het getal 12 is deelbaar door 2 en bovendien ook door 4. Toch is het niet deelbaar door 8.

(c) Ja: als je weet dat n de priemfactoren 2 en 3 bevat en je weet bovendien dat n de priemfactoren 3 en 5 bevat, dan bevat n dus de priemfactoren 2, 3 en 5.

□

Opgave 16. *Er zijn 25 priemgetallen onder de 100. Vind ze door in onderstaande tabel eerst alle veelvouden van 2 weg te strepen (behalve 2 zelf natuurlijk), dan alle veelvouden van 3 die er nog staan ook weg te strepen, enzovoorts.*

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Uitwerking. De priemgetallen die je dan vindt zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. □

Opgave 17. (a) Laat van de volgende getallen zonder rekenmachine zien dat het geen priemgetallen zijn: 2008; 12345678; 12345; 489489; $137^2 - 135^2$.

(b) Hoeveel even priemgetallen zijn er? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door 17? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door 25?

Uitwerking.

(a) $2008 = 2 \cdot 1004$;

12345678 is ook even;

12345 is een 5-voud;

$489489 = 489 \cdot 1001$;

$137^2 - 135^2 = (137 - 135)(137 + 135) = 4 \cdot 136$.

(b) 1 (namelijk alleen het getal 2; elk ander even positief getal n is deelbaar door 2 en $n > 2$);

1 (namelijk alleen het getal 17; elk ander positief 17-voud n is deelbaar door 17 en $n > 17$);

0 (elk positief 25-voud n is namelijk deelbaar door 5 en $n > 5$).

□

Opgave 18. Veronderstel dat $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$.

(a) Geef de priemfactorontbinding van $10n$.

(b) Geef de priemfactorontbinding van $15!n$ ($15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$).

(c) Geef de priemfactorontbinding van n^2 .

(d) Geef de priemfactorontbinding van $(7n)^8$.

Uitwerking.

- (a) $10n = 2 \cdot 5 \cdot n = 2^{a+1} \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$;
- (b) $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1$ dus $15!n = 2^{a+11} \cdot 3^{b+6} \cdot 5^{c+3} \cdot 7^{d+2} \cdot 11^{e+1} \cdot 13^{f+1}$;
- (c) $n^2 = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c} \cdot 7^{2d} \cdot 11^{2e} \cdot 13^{2f}$;
- (d) $(7n)^8 = 2^{8a} \cdot 3^{8b} \cdot 5^{8c} \cdot 7^{8d+8} \cdot 11^{8e} \cdot 13^{8f}$.

□

- Opgave 19.** (a) *Vind alle priemgetallen p waarvoor $p + 1$ ook een priemgetal is.*
(b) *Vind alle priemgetallen p waarvoor $p + 2$ en $p + 4$ ook priemgetallen zijn.*

Uitwerking.

- (a) Van p en $p + 1$ moet een van beide even zijn. Er bestaat echter maar één even priemgetal: 2. Dus ofwel $p = 2$ (zodat $p + 1 = 3$; die is inderdaad priem) ofwel $p + 1 = 2$ (zodat $p = 1$, maar dat is geen priemgetal). De enige oplossing is dus $p = 2$.
- (b) Van p , $p + 2$ en $p + 4$ moet een van de drie een drievoud zijn. Er bestaat echter maar één priemgetal dat een drievoud is: 3. Dus moet ofwel $p = 3$ (en die voldoet: $p + 2 = 5$ en $p + 4 = 7$) ofwel $p + 2 = 3$ (maar dan $p = 1$; tegenspraak) ofwel $p + 4 = 3$ (maar dan $p = -1$; tegenspraak). De enige oplossing is dus $p = 3$.

□

- Opgave 20.** *Bewijs dat $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ voor alle natuurlijke getallen n een geheel getal is.*

Uitwerking. Er geldt

$$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{1}{6}n(n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Van drie opeenvolgende getallen n , $n + 1$ en $n + 2$ is er altijd precies één deelbaar door 3. En verder is er ten minste één deelbaar door 2. Dus is het product deelbaar door 6. □

- Opgave 21** (Finale 2007). *Bepaal het aantal gehele getallen a met $1 \leq a \leq 100$ zodat a^a het kwadraat van een geheel getal is. (Beredeneer dat je ze allemaal hebt geteld.)*

Uitwerking. In de priemontbinding van het kwadraat van een geheel getal komt elke priemfactor een even aantal keren voor. En omgekeerd: als in de ontbinding van een geheel getal elke priemfactor een even aantal keren voorkomt, is het getal het kwadraat van een geheel getal.

We onderscheiden twee gevallen: a even en a oneven.

- Veronderstel a is even, dan $a = 2c$ en $a^a = (2c)^{2c} = (2^c c^c)^2$. In dit geval is a^a dus altijd het kwadraat van een geheel getal.
- Veronderstel a is oneven, dan $a = 2c + 1$ en

$$a^a = (2c + 1)^{2c+1} = (2c + 1)^{2c}(2c + 1) = ((2c + 1)^c)^2(2c + 1).$$

Aangezien $((2c + 1)^c)^2$ een kwadraat is, geldt dat a^a het kwadraat van een geheel getal is precies dan als elke priemfactor van $(2c + 1)$ een even aantal keren voorkomt, dus precies dan als $(2c + 1)$ zelf het kwadraat van een geheel getal is.

Conclusie: we vinden alle even getallen en alle oneven kwadraten kleiner dan of gelijk aan 100 en dat zijn er $50 + 5 = 55$. \square

Opgave 22. Welk getal heeft meer positieve delers: 6^9 of 97^{97} ?

Uitwerking. $6^9 = 2^9 \cdot 3^9$ heeft $10 \cdot 10 = 100$ positieve delers; 97^{97} heeft er slechts 98. \square

Opgave 23. Veronderstel dat $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$. Hoeveel positieve delers heeft n ?

Uitwerking. De positieve delers van n zijn van de vorm $d = 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w \cdot 7^x \cdot 11^y \cdot 13^z$ met u, v, w, x, y, z zodanig dat $0 \leq u \leq a$, et cetera. Dat zijn steeds $(a + 1)$, $(b + 1)$ et cetera mogelijkheden, dus het aantal positieve delers is $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)(e + 1)(f + 1)$. \square

Opgave 24. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat n^2 een oneven aantal positieve delers heeft.

Uitwerking. Kijk naar de priemfactorisatie: alle exponenten zijn $2e_i$, dus het aantal positieve delers is $(2e_2 + 1)(2e_3 + 1)(2e_5 + 1)(2e_7 + 1) \dots$ en dat is een product van oneven getallen, dus oneven.

Alternatief: als d een positieve deler is van n^2 , dan is $\frac{n^2}{d}$ het ook. Dit geeft een paring tussen de positieve delers van n^2 . Er is precies één positieve deler die met zichzelf gepaard wordt; dat gebeurt als $d = \frac{n^2}{d}$, dus als $d^2 = n^2$, dus als $d = n$. Dus op eentje na komen alle positieve delers in koppeltjes voor; dan zijn er dus een oneven aantal positieve delers. \square

Opgave 25. Ga na voor welke paren natuurlijke getallen (m, n) het getal $m^2 - n^2$ priem is.

Uitwerking. Het getal $m^2 - n^2$ moet allereerst positief zijn, dus $m > n$. We weten dat $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ en dat ziet er vrij samengesteld uit. De enige keren dat het

priem zou kunnen zijn, is als $m + n = 1$ (maar dat kan natuurlijk niet, want $m \geq 1$ en $n \geq 1$ dus $m + n \geq 2$) of als $m - n = 1$ (en dat zou prima kunnen: $m = n + 1$). We hoeven dus alleen nog maar de gevallen te onderzoeken waar $m = n + 1$. Dan geldt $m^2 - n^2 = (n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$. Dat zou priem kunnen zijn of niet. De paren $(m, n) = (n + 1, n)$ die voldoen zijn dus precies de paren waarbij $2n + 1 = p$ voor zeker priemgetal p . Dat moet dan wel een oneven priemgetal zijn. Omgekeerd hoort er bij elk oneven priemgetal een natuurlijk getal n . Er geldt in dat geval dat $n = \frac{p-1}{2}$ en dus dat $m = n + 1 = \frac{p-1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{p+1}{2}$. Conclusie: het geldt precies voor alle paren $(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2})$, waarbij p de oneven priemgetallen $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$ doorloopt. Voor de volledigheid geven we even de eerste paren; let op de gaten ertussen!

$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 5), (7, 6), (9, 8), (10, 9), (12, 11), (15, 14), \dots$

□

Opgave 26 (Finale 2008). *Bepaal alle paren positieve gehele getallen (m, n) waarvoor geldt*

$$3 \cdot 2^n + 1 = m^2.$$

Uitwerking. De vergelijking laat zich herschrijven tot $3 \cdot 2^n = (m - 1)(m + 1)$. Vanwege $n > 0$ is $3 \cdot 2^n$ even, dus $m - 1$ of $m + 1$ is even, dus beide zijn even. Omdat het verschil tussen $m - 1$ en $m + 1$ slechts 2 is, kunnen ze niet beide meer dan één factor 2 bevatten, dus bevat één van de twee factoren $m - 1$ en $m + 1$ precies één factor 2. Deze ene factor bevat al dan niet ook de factor 3 en is dus gelijk aan 2 of 6; de andere factor is 2 hoger of juist 2 lager.

Als de ene factor 2 is, dan moet de andere factor dus 0 of 4 zijn, wat in beide gevallen geen oplossing geeft (want de andere factor moet van de vorm $3 \cdot 2^{n-1}$ zijn). Als de ene factor 6 is, dan is de andere 4 of 8, en beide mogelijkheden leiden tot een oplossing (want de andere factor moet nu van de vorm 2^{n-1} zijn). We concluderen dat er precies twee oplossingen zijn: $(m, n) = (5, 3)$ en $(m, n) = (7, 4)$. □

Opgave 27. *Bekijk de eerste 7 waarden van de functie $f(n) = 41 + n(1 + n)$ (dus vul in $n = 1, \dots, 7$). Ga na dat er steeds een priemgetal uit komt. Hoe zit dat vanaf $n = 8$? Kun je concluderen dat er voor alle natuurlijke getallen n een priemgetal uit komt?*

Uitwerking. De waarden $f(1), \dots, f(39)$ blijken allemaal priem te zijn:

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$	$f(11)$	$f(12)$	$f(13)$
43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	173	197	223

$f(14)$	$f(15)$	$f(16)$	$f(17)$	$f(18)$	$f(19)$	$f(20)$	$f(21)$	$f(22)$	$f(23)$	$f(24)$	$f(25)$	$f(26)$
251	281	313	347	383	421	461	503	547	593	641	691	743

$f(27)$	$f(28)$	$f(29)$	$f(30)$	$f(31)$	$f(32)$	$f(33)$	$f(34)$	$f(35)$	$f(36)$	$f(37)$	$f(38)$	$f(39)$
797	853	911	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

Dus je zou misschien denken dat deze functie alleen maar priemgetallen als waarden aanneemt. Toch kun je al voelen aankomen dat het bij $n = 40$ (en $n = 41$) wel mis moet gaan:

$$f(40) = 41 + 40 \cdot 41 = 1 \cdot 41 + 40 \cdot 41 = (1 + 40) \cdot 41 = 41^2 \text{ dus is niet priem}$$

$$f(41) = 41 + 41 \cdot 42 = 41 \cdot 1 + 41 \cdot 42 = 41 \cdot (1 + 42) = 41 \cdot 43 \text{ dus is niet priem}$$

Het blijft opvallend dat het bij $n = 40$ pas voor het eerst mis gaat. □

4 Gemengde opgaven

Opgave 28 (Finale 2009). *We bekijken de rij getallen 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, ... die we maken door met 0 te beginnen, dan 1 erbij op te tellen en nog een keer 1 erbij op te tellen, dan 2 erbij op te tellen en nog een keer 2 erbij op te tellen, dan 3 erbij op te tellen en nog een keer 3 erbij op te tellen, enzovoorts. Als we de termen van deze rij $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ noemen, dan geldt dus $a_0 = 0$ en*

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + n, \quad a_{2n} = a_{2n-1} + n$$

voor alle gehele getallen $n \geq 1$.

Vind alle gehele getallen $k \geq 0$ waarvoor a_k het kwadraat van een geheel getal is.

Uitwerking. Voor $n \geq 1$ vinden we dat $a_{2n} = a_{2n-1} + n = a_{2n-2} + 2n$, dus $a_{2n} = 0 + 2 + 4 + \dots + 2n = 2(0 + 1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1)$. Nu geldt (wegens $n > 0$) dat $n^2 < n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, dus $a_{2n} = n(n + 1)$ kan nooit een kwadraat zijn; het zit precies tussen twee opeenvolgende kwadraten in. De even $k \geq 2$ voldoen dus niet. Uit $a_{2n-1} = a_{2n} - n = n(n + 1) - n = n^2$ volgt dat a_{2n-1} juist wel altijd een kwadraat is, dus alle oneven k voldoen juist wel. Ten slotte is $a_0 = 0$ ook een kwadraat. We concluderen dat alle oneven k en $k = 0$ voldoen, en alle overige k juist niet. □

Opgave 29. *Laat p en q priemgetallen zijn met $p > 3$ en $q = p + 2$. Bewijs dat $p + q$ deelbaar is door 12.*

Uitwerking. Omdat $p > 3$, is p geen 3-voud. Zou p een 3-voud plus 1 zijn, dan zou q een 3-voud zijn; maar een 3-voud groter dan 3 kan nooit priem zijn, tegenspraak. Dus p is een 3-voud plus 2. Maar dan is q een 3-voud plus 4. Samen geldt dus dat $p + q$ een 3-voud plus 6 is, oftewel een 3-voud. Verder is $p + q$ de als som van twee opeenvolgende oneven getallen een 4-voud (want $(4k + 1) + (4k + 3) = 8k + 4 = 4(2k + 1)$ en $(4k + 3) + (4k + 5) = 8k + 8 = 4(2k + 2)$). Dus $p + q$ is een 12-voud. \square

Opgave 30. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$0 \cdot n + 1 \cdot (n - 1) + 2 \cdot (n - 2) + 3 \cdot (n - 3) + \cdots + (n - 1) \cdot 1 + n \cdot 0 = \frac{1}{6}(n + 1)n(n - 1).$$

Uitwerking. Inductie naar n .

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ staat er links $0 \cdot 1 + 1 \cdot 0$, wat 0 is. Rechts staat $\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$ en dat is ook 0.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$:

$$0 \cdot k + 1 \cdot (k - 1) + \cdots + (k - 1) \cdot 1 + k \cdot 0 = \frac{1}{6}(k + 1)k(k - 1). \quad (\text{IH})$$

Te bewijzen is nu dat

$$0 \cdot (k + 1) + 1 \cdot (k) + \cdots + (k - 1) \cdot 2 + k \cdot 1 + (k + 1) \cdot 0 = \frac{1}{6}(k + 2)(k + 1)k.$$

Links is er $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \cdots + (k - 1) \cdot 1 + k \cdot 1 + (k + 1) \cdot 0$ bij gekomen en dat is $1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}(k + 1)k$. Dus volgens de inductiehypothese is de waarde van het nieuwe linkerlid gelijk aan $\frac{1}{6}(k + 1)k(k - 1) + \frac{1}{2}(k + 1)k = \frac{1}{6}(k + 1)(k)((k - 1) + 3) = \frac{1}{6}(k + 1)(k)(k + 2)$ en dat is precies wat we wilden bewijzen.

Met inductie concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. \square

Opgave 31 (Finale 2005). *Voor vijf verschillende reële getallen a_1, a_2, a_3, a_4 en a_5 kijken we naar de waarden die de som $a_i + a_j$ kan aannemen wanneer i en j variëren over $1 \leq i < j \leq 5$. Het aantal verschillende waarden dat de som $a_i + a_j$ kan aannemen noemen we m . Bepaal de kleinst mogelijke waarde van m .*

Uitwerking. We ordenen de vijf getallen van klein naar groot en noemen ze voor het gemak a, b, c, d en e , dus $a < b < c < d < e$. Dan geldt:

$$a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e,$$

dus we krijgen sowieso ten minste 7 verschillende uitkomsten. Met het voorbeeld $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ en $e = 5$ vinden we voor de 10 sommen $a_i + a_j$ de waarden 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Dus is 7 de kleinst mogelijke waarde van m . \square

Opgave 32 (Finale 2007). *Bestaat er een getal van de vorm $444 \dots 4443$ (allemaal 4'en en op het eind een 3) dat deelbaar is door 13? Zo ja, geef dan een getal van die vorm dat deelbaar is door 13; zo nee, bewijs dan dat er niet zo'n getal is.*

Uitwerking. Noem a_n het getal bestaande uit n 4'en en op het eind een 3. We gaan bewijzen dat voor alle $n = 0, 1, 2, \dots$ geldt dat a_n geen 13-voud is. (Inductiebasis) Aangezien a_0 gelijk is aan 3, is a_0 geen 13-voud.

(Inductiestap) Stel a_k is geen 13-voud voor een zekere $k \geq 0$. We verkrijgen a_{k+1} uit a_k door a_k met 10 te vermenigvuldigen en er 13 bij op te tellen: $a_{k+1} = 10a_k + 13$. Nu is a_k geen 13-voud, dus $10a_k$ ook niet, dus $10a_k + 13$ ook niet. \square

Opgave 33 (Finale 2020). *We bekijken getallenrijen a_1, a_2, a_3, \dots die voldoen aan de formule $a_{n+1} = \frac{a_n + a_1}{a_n + 1}$ voor alle $n \geq 1$.*

(a) *Stel dat $a_1 = -3$. Bereken a_{2020} .*

(b) *Stel dat $a_1 = 2$. Bewijs dat voor alle $n \geq 2$ geldt dat $\frac{4}{3} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$.*

Uitwerking.

(a) Als $a_1 = -3$, dan geldt $a_2 = \frac{a_1 + a_1}{a_1 + 1} = \frac{-6}{-2} = 3$. Vervolgens berekenen we $a_3 = \frac{a_2 + a_1}{a_2 + 1} = \frac{0}{4} = 0$. Daarna komt dan $a_4 = \frac{a_3 + a_1}{a_3 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$. We zien dus dat $a_4 = a_1$. Omdat a_{n+1} alleen van a_n en a_1 afhangt, zien we dat $a_5 = a_2 = 3$, $a_6 = a_3 = 0$, $a_7 = a_4 = -3$, enzovoorts. Met andere woorden: de rij is periodiek met periode 3 en we zien dat

$$a_{2020} = a_{2017} = a_{2014} = \dots = a_4 = a_1 = -3.$$

(b) We gaan de stelling bewijzen met volledige inductie. We beginnen met het basisgeval $n = 2$. We berekenen $a_2 = \frac{a_1 + a_1}{a_1 + 1} = \frac{4}{3}$ en zien dat inderdaad geldt dat $\frac{4}{3} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$.

Stel nu dat we voor zekere $n = k \geq 2$ bewezen hebben dat $\frac{4}{3} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$. We zullen bewijzen dat deze ongelijkheden ook gelden voor $n = k + 1$.

We merken eerst op dat

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 2}{a_k + 1} = 1 + \frac{1}{a_k + 1}.$$

Uit de inductiehypothese ($\frac{4}{3} \leq a_k \leq \frac{3}{2}$) volgt dat $\frac{7}{3} \leq a_k + 1 \leq \frac{5}{2}$ en dus dat

$$\frac{2}{5} \leq \frac{1}{a_k + 1} \leq \frac{3}{7}.$$

Door bij elk lid van deze ongelijkheden 1 op te tellen vinden we nu

$$\frac{7}{5} \leq 1 + \frac{1}{a_k + 1} = a_{k+1} \leq \frac{10}{7}.$$

Omdat $\frac{4}{3} \leq \frac{7}{5}$ en $\frac{10}{7} \leq \frac{3}{2}$, zien we dat $\frac{4}{3} \leq a_{k+1} \leq \frac{3}{2}$, zoals we wilden bewijzen.

□

Opgave 34. *Bewijs dat er 100 opeenvolgende natuurlijke getallen zijn die allemaal samengesteld zijn.*

Uitwerking. Kijk naar $101! + 2, 101! + 3, \dots, 101! + 101$. Deze getallen zijn achtereenvolgens deelbaar door $2, 3, 4, \dots, 101$ dus het zijn 100 opeenvolgende getallen die stuk voor stuk samengesteld zijn. □

Opgave 35 (Finale 2010). *Een getal heet een reekssom als het geschreven kan worden als $m + (m + 1) + \dots + (n - 1) + n$, voor positieve gehele getallen $m < n$. Zo is 18 een reekssom, want $18 = 5 + 6 + 7$. Een getal heet een tweemacht als het geschreven kan worden als 2^k met $k \geq 0$ een geheel getal.*

- (a) *Laat zien dat geen enkel positief geheel getal zowel een reekssom als een tweemacht is.*
- (b) *Laat zien dat elk positief geheel getal een reekssom of een tweemacht is.*

Uitwerking.

- (a) Stel dat $R = m + (m + 1) + \dots + (n - 1) + n$ een reekssom is. De somformule voor rekenkundige rijen vertelt ons dat $R = \frac{1}{2}(m + n)(n - m + 1)$. Omdat m en n verschillend en positief moeten zijn geldt $m + n \geq 2$ en $(n - m) + 1 \geq 1 + 1 = 2$.

Omdat $(m + n) + (n - m + 1) = 2n + 1$ oneven is, is een van de twee getallen $m + n$ en $n - m + 1$ oneven. Omdat $2R = (m + n)(n - m + 1)$ heeft R dus een oneven deler (groter dan 1) en kan daarmee geen tweemacht zijn.

We concluderen dat er geen getallen bestaan die zowel een reekssom als een tweemacht zijn.

- (b) Stel dat k een positief geheel getal is dat geen tweemacht is. We gaan bewijzen dat k een reekssom is. Door middel van priemfactorisatie kunnen we k schrijven als $c \cdot 2^d$ voor een oneven getal c en een niet-negatief geheel getal d . Dat k geen tweemacht is, wil zeggen dat $c > 1$. Nu gaan we $n > m$ zoeken zodanig dat $m + \dots + n = \frac{1}{2}(m + n)(n - m + 1) = c \cdot 2^d$, oftewel $(m + n)(n - m + 1) = c \cdot 2^{d+1}$.

We zien dat $m + n \geq n + 1 > n + 1 - m$, dus $m + n$ is de grootste factor van $(m + n)(n - m + 1)$. We onderscheiden twee gevallen.

- (1) $c > 2^{d+1}$. In dit geval kiezen we $m = \frac{c - 2^{d+1} + 1}{2}$ en $n = \frac{c + 2^{d+1} - 1}{2}$. Duidelijk is dat $n > m$ en beide getallen zijn geheel (de tellers hebben twee oneven termen en zijn dus even) en positief wegens de aanname $c > 2^{d+1}$. Bovendien geldt $(m + n)(n - m + 1) = c \cdot 2^{d+1}$ zodat $m + \dots + n = k$.

(2) $c < 2^{d+1}$. Nu kiezen we $m = \frac{2^{d+1}-c+1}{2}$ en $n = \frac{c+2^{d+1}-1}{2}$. Duidelijk is dat $n > m$ en beide getallen zijn geheel en positief (vanwege de aanname $c < 2^{d+1}$). Bovendien geldt $(m+n)(n-m+1) = c \cdot 2^{d+1}$ zodat $m + \dots + n = k$.

Merk op dat c nooit gelijk kan zijn aan 2^{d+1} , want 2^{d+1} is even en c is oneven. We hebben nu laten zien dat k in alle gevallen een reekssom is en concluderen dat elk getal een tweemacht of een reekssom is.

□

Opgave 36 (Finale 1971). Voor ieder natuurlijk getal m definiëren we $a(m)$ als het aantal priemfactoren 2 in zijn priemontbinding. Voor positieve gehele n definiëren we $S(n)$ door:

$$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n).$$

Druk $S(n)$ uit in n .

Uitwerking. We maken eerst een tabel om een vermoeden te krijgen.

n	$a(1) + a(2) + a(3) + \dots + a(2^n)$	en dat is	$2^n - 1?$
1	0 + 1	1	1
2	0 + 1 + 0 + 2	3	3
3	0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3	7	7
4	0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 4	15	15

We zien een duidelijk patroon en we kunnen dat zelfs onder woorden proberen te brengen. De oneven getallen hebben geen bijdrage. De even getallen (dat zijn er 2^{n-1}) hebben allemaal een bijdrage van minstens één factor 2, de 2^{n-2} viervouden van nog één, et cetera, tot aan het ene 2^n -voud. Dat zijn er in totaal $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0 = 2^n - 1$. Toch is dit een wat slordig bewijs: we tellen dingen eerst voor het gemak maar één keer, dan sommige dingen nog maar een keer, et cetera. Intuïtief klopt het allemaal wel, maar toch is het mooier om het wiskundig nog even harder te maken.

We gaan nu met inductie bewijzen dat $S(n) = 2^n - 1$. Voor $n = 1$ is het duidelijk, bijvoorbeeld uit de tabel. Stel dat het geldt voor $n = k$, dan weten we dat de getallen $1, 2, 3, \dots, 2^k$ in totaal $2^k - 1$ priemfactoren 2 bevatten. Laten we nu al deze getallen met 2 vermenigvuldigen. Het is duidelijk dat we er dan 2^k priemfactoren 2 bij krijgen (zoveel getallen staan er immers), dus het aantal priemfactoren 2 in $2, 4, 6, \dots, 2^{k+1}$ is $(2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Voegen we hier nu nog de oneven getallen bij, dan heeft dat geen invloed op het totaal aan factoren 2, dus we concluderen dat $S(k+1) = 2^{k+1} - 1$. En dat is precies de bewering voor $n = k+1$. □

Opgave 37 (Finale 1986). *Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt dat*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Uitwerking. (Inductiebasis) Voor $n = 1$ staat er links $\frac{1}{2}$ en rechts ook.
(Inductiestap) Veronderstel dat het geldt voor $n = k \geq 1$. Dan geldt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}.$$

Als we de stap maken naar $n = k + 1$ komt er links een term $\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ bij, terwijl er rechts enerzijds twee termen bijkomen ($\frac{1}{2k+1}$ en $\frac{1}{2k+2}$) maar ook een term af gaat (namelijk $\frac{1}{k+1}$). Netto komt er rechts dus $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$ bij en als we dat gelijknamig maken komen we uit op $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{2}{2k+2} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{(2k+2)-(2k+1)}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$. Laat dat nou precies zijn wat er links ook bijkomt! Aan beide kanten komt er dus hetzelfde bij en vanuit de inductiehypothese hebben we dus de bewering voor $n = k + 1$ afgeleid. \square

Alternatieve uitwerking. Deze opgave kan ook zonder inductie: voor alle $k \geq 1$ geldt

$$\frac{1}{(2k-1)2k} = \frac{2k - (2k-1)}{(2k-1)2k} = \frac{2k}{(2k-1)2k} - \frac{2k-1}{(2k-1)2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k}.$$

Dit sommeren we nu over k van 1 tot en met n . De termen helemaal links vormen samen precies

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$$

De termen helemaal rechts zijn samen

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right),$$

en dat is precies

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

\square

Opgave 38 (Finale 2011). *De telduivel heeft alle gehele getallen gekleurd: elk getal is nu óf zwart óf wit. Het getal 1 is wit. Voor elk tweetal witte getallen a en b (de getallen a en b mogen hetzelfde zijn) hebben $a - b$ en $a + b$ verschillende kleuren. Bewijs dat het getal 2011 wit is.*

Uitwerking. Gegeven is dat 1 wit is. Het getal 0 is zwart, want als 0 wit was, zouden $1 = 1 - 0$ en $1 = 1 + 0$ verschillende kleuren hebben. Het getal 2 is wit, omdat $0 = 1 - 1$

(zwart) en $2 = 1 + 1$ verschillende kleuren hebben. Het getal 3 is zwart, omdat $1 = 2 - 1$ (wit) en $3 = 2 + 1$ verschillende kleuren hebben.

Nu volgt een bewijs met inductie dat voor iedere gehele $k \geq 0$ geldt dat $3k$ zwart is en $3k+1$ en $3k+2$ wit zijn. Voor $k = 0$ hebben we dit zojuist bewezen. Stel nu dat de stelling waar is voor alle $k \leq \ell$. Omdat $3\ell + 2$ en 1 wit zijn wegens de inductiehypothese, zijn $3\ell+2-1 = 3\ell+1$ en $3\ell+2+1 = 3\ell+3$ verschillend gekleurd. Omdat $3\ell+1$ wit is wegens de inductiehypothese, is $3\ell+3$ zwart. Aangezien $3\ell+2$ en 2 wit zijn, zijn $3\ell+2+2 = 3\ell+4$ en $3\ell+2-2 = 3\ell$ verschillend gekleurd. Omdat 3ℓ zwart is, geldt dat $3\ell+4$ wit is. Ten slotte merken we op dat zowel $3\ell+4$ als 1 wit zijn en dat $3\ell+4+1 = 3\ell+5$ en $3\ell+4-1 = 3\ell+3$ daarom verschillend gekleurd zijn. Hieruit volgt dat $3\ell+5$ wit is. Hiermee is de stelling bewezen voor $k = \ell + 1$; namelijk dat $3(\ell + 1)$ zwart is en dat $3(\ell + 1) + 1$ en $3(\ell + 1) + 2$ wit zijn.

Aangezien $2011 = 3 \cdot 670 + 1$ is dit ook direct een bewijs voor het feit dat 2011 wit is. \square

Opgave 39 (Finale 1984). Voor $n = 1, 2, 3, \dots$ wordt a_n gedefiniëerd door:

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n - 1)}.$$

Bewijs dat voor elke n geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$$

Uitwerking. (Inductiebasis) Voor $n = 1$ moeten we laten zien dat $\frac{1}{\sqrt{4}} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. De eerste ongelijkheid is een gelijkheid (dus klopt) en voor de tweede is het handig om $\frac{1}{2}$ even te schrijven als $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$; wegens $8 > 4$ geldt $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

(Inductiestap) Veronderstel dat het geldt voor $n = k \geq 1$: $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \leq a_k \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}}$.

Te bewijzen: $\frac{1}{\sqrt{3k+4}} \leq a_{k+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}$. Merk op dat $a_{k+1} = \frac{3k+1}{3k+2} a_k$ dus uit de inductiehypothese volgt dat

$$\frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \leq a_{k+1} \leq \frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}}.$$

Resteert te bewijzen:

$$(1) : \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \leq \frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \quad \text{en} \quad (2) : \frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}.$$

Laten we eerst een kijken hoe we ongelijkheid (1) kunnen bewijzen. Deze kunnen we omschrijven tot $\frac{1}{\sqrt{3k+4}} \leq \frac{\sqrt{3k+1}}{3k+2}$ en dus tot $(3k+2) \leq \sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$. We hebben hierbij alleen maar vermenigvuldigd met positieve factoren, dus het teken is niet omgeklapt. Als we linker- en rechterkant kwadrateren en verder uitwerken komen we uit op twee

uitdrukkingen die we goed kunnen vergelijken: $(3k+2)^2 = (3k)^2 + 4(3k) + 4$ en $(3k+1)(3k+4) = (3k)^2 + 5(3k) + 4$ en het is nogal triviaal dat $(3k)^2 + 4(3k) + 4 \leq (3k)^2 + 5(3k) + 4$, want rechts staat in feite een term $(3k)$ meer. We kunnen dus concluderen dat $(3k+2)^2 \leq (3k+1)(3k+4)$. (We kunnen de laatste paar zinnen samenvatten door:

$$(3k+2)^2 = (3k)^2 + 4(3k) + 4 \leq (3k)^2 + 5(3k) + 4 = (3k+1)(3k+4);$$

daarbij is elk (on)gelijkheidsteken goed te verklaren!) Door nu al deze stappen weer terug te zetten — de wortel te nemen (daarbij komen we weer op de oorspronkelijke uitdrukkingen uit, want die waren positief) en te delen door de positieve factoren — zien we dus dat (1) ook klopt.

Dan nu ongelijkheid (2). Deze kunnen we omschrijven tot $\frac{\sqrt[3]{3k+1}^2}{3k+2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}$ en dus tot $\sqrt[3]{3k+1}^2 \sqrt[3]{3k+4} \leq (3k+2)$. We gaan nu juist links en rechts de derdemacht nemen. Inderdaad is de ene uitgewerkte uitdrukking kleiner dan of gelijk aan de tweede:

$$(3k+1)^2(3k+4) = (3k)^3 + 6(3k)^2 + 9(3k) + 4 \leq (3k)^3 + 6(3k)^2 + 12(3k) + 8 = (3k+2)^3.$$

Door terug te redeneren zien we dat (2) dus ook klopt. □

Katern 2

Getaltheorie

5 Delers

In katern 1 heb je geleerd wat een *deler* van een getal is. Zo zijn bijvoorbeeld 1, 2, 5, 10, 25, 50, -1 , -2 , -5 , -10 , -25 en -50 de delers van het getal 50: precies de gehele getallen waar 50 deelbaar door is (dat wil zeggen: zodat er een geheel getal uitkomt). Kortom: het getal n is deelbaar door het gehele getal a precies dan als er een geheel getal b is zo dat geldt $ab = n$. In dat geval is b trouwens ook een deler van n .

Het getal n hoeft niet per se positief te zijn. We kunnen hetzelfde zeggen voor een negatief geheel getal n en zelfs voor $n = 0$. De delers van -9 zijn dus de gehele getallen 1, 3, 9, -1 , -3 en -9 , wat precies ook de delers van 9 zijn.

Hoe zit dat nu met $n = 0$? De delers van 0 zijn precies de gehele getallen a waarvoor er een b is met $ab = 0$. Maar dit is waar voor alle gehele getallen a : neem maar $b = 0$. De delers van 0 zijn dus alle gehele getallen. Maar we spreken liever af dat 0 zelf geen deler is van 0. Je weet immers niet wat de uitkomst is van $\frac{0}{0}$.

We zetten nog even wat voorbeelden op een rijtje:

4 is een deler van 12	want $4 \cdot 3 = 12$,
-11 is een deler van 33	want $(-11) \cdot (-3) = 33$,
6 is een deler van -6	want $6 \cdot (-1) = -6$,
13 is een deler van 0	want $13 \cdot 0 = 0$.

De *priemdelers* of *priemfactoren* van een natuurlijk getal n zijn die delers die ook een priemgetal zijn. Zo zijn 2 en 5 bijvoorbeeld de priemdelers van 50. Deze priemdelers kom je ook weer tegen in de priemfactorisatie. In katern 1 hadden we gezien dat elk getal een

unieke priemontbinding heeft. De priemontbinding van bijvoorbeeld 50 is $50 = 2^1 \cdot 5^2$. Daarin komt de priemdeler 5 twee keer voor (en de priemdeler 2 één keer).

Stel dat a een deler is van n , dus $n = ab$ voor zekere gehele b (en $a \neq 0$). Kunnen we nu een veelvoud van n , zeg kn , ook delen door a ? Anders gezegd: is a ook een deler van kn ? Ja, want er geldt $kn = kab = (kb)a$, dus als we kn delen door a , dan krijgen we kb als uitkomst en dat is weer geheel.

Rekenregel 1. *Als a een deler is van n , dan is a een deler van kn .*

Stel nu dat a een positieve deler is van kn . Is dan a ook een deler van n en van k ? Of misschien van één van beide? Het antwoord op deze vragen hangt er vanaf of a een priemgetal is of niet. Neem als voorbeeld even $a = 6$. Dat is geen priemgetal, want $6 = 2 \cdot 3$. Als we $k = 4$ en $n = 15$ hebben, dan is $kn = 60$ en dat is deelbaar door 6. Maar 6 is geen deler van 4 en ook niet van 15. Dat komt omdat we 6 kunnen splitsen: de priemfactor 2 van 6 zit in 4, maar niet in 15; en de priemfactor 3 van 6 zit niet in 4, maar juist wel in 15. Daardoor komt het dat 4 en 15 niet deelbaar zijn door 6, maar hun product wel.

Als a een priemgetal is, dan kunnen we a niet splitsen zoals we hierboven met 6 deden. In dat geval moet a een deler zijn van n of van k of zelfs van allebei. Dit kunnen we bewijzen met behulp van priemontbindingen. Bekijk namelijk de priemontbinding van n en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen p_1, p_2, \dots, p_t . Bekijk ook de priemontbinding van k en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen q_1, q_2, \dots, q_r . De priemfactoren die dan in kn voorkomen zijn $p_1, p_2, \dots, p_t, q_1, q_2, \dots, q_r$, waarbij er misschien nog dubbele voorkomen als een p 'tje gelijk is aan een q 'tje. In elk geval kan een priemgetal dat niet tussen de p 'tjes en q 'tjes zit, ook niet voorkomen in de priemontbinding van kn . Als a nu een priemgetal is dat een deler is van kn , dan moet a voorkomen in de priemontbinding van kn . Dus a is gelijk aan één van de p 'tjes of q 'tjes. Als $a = p_i$ voor een of andere i , dan is a een deler van n . En als $a = q_j$ voor een of andere j , dan is a een deler van k . Dus a is een deler van minstens één van k en n . We formuleren dit als een rekenregel.

Rekenregel 2. *Als a een priemdeler is van kn , dan is a een deler van k of van n .*

Voorbeeld 5. *Laat p een priemgetal zijn. Vind alle natuurlijke getallen a waarvoor p een deler is van $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.*

Oplossing. Als $a \geq p$, dan komt p voor in het product $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Dus dan is p zeker een deler van dat product. Wat gebeurt er als $a < p$? Dan kan dat product nog steeds wel erg groot zijn, groter dan p . Toch kan p er geen deler van zijn. Om dit te laten zien, gebruiken we rekenregel 2. Stel namelijk dat p wel een deler is van het product. Dan is p een deler van minstens één van de a factoren, zeg van de factor b . Alle factoren die voorkomen in het product, zijn kleiner dan of gelijk aan a , dus ook $b \leq a$. Verder hadden we aangenomen $a < p$, dus $b < p$. Maar dan kan p natuurlijk geen deler zijn van b : de

positieve getallen waar p een deler van is, zijn $p, 2p, 3p$, enzovoorts, maar geen getallen kleiner dan p . Kortom, dit kan niet. Dus p is geen deler van $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ als $a < p$.

We concluderen dat de gezochte natuurlijke getallen a precies de natuurlijke getallen met $a \geq p$ zijn. \square

De redenering hierboven gaat niet op als p geen priemgetal is. Dan mogen we rekenregel 2 namelijk niet toepassen. Onze conclusie is dan ook verkeerd, zoals we met een tegenvoorbeeld kunnen laten zien. Neem bijvoorbeeld $p = 6$ (geen priemgetal). Als het bovenstaande voorbeeld ook waar zou zijn voor niet-priemgetallen, dan zou het product alleen deelbaar zijn door 6 als $a \geq 6$. Als we echter $a = 4$, kiezen, dan is het product $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ en dat is toch deelbaar door 6. Dus als p niet priem is, dan kan ook voor getallen a die kleiner zijn dan p , gelden dat p een deler is van $a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Zoals we hierboven al zagen geldt rekenregel 2 niet als a geen priemgetal is. Als bijvoorbeeld $a = 4$ een deler is van een product kn , kunnen we niet concluderen dat k of n deelbaar moet zijn door 4. Het zou immers kunnen dat zowel k als n precies één priemfactor 2 bevat. In het speciale geval dat $k = 2$ kunnen we in ieder geval wel concluderen dat n deelbaar moet zijn door 2. Anders bevat kn immers maar één priemfactor 2 en is het niet deelbaar door 4. We zien dus dat als $2n$ deelbaar is door 4, dat dan n deelbaar moet zijn door 2. Dit is een speciaal geval van onderstaande rekenregel (namelijk het geval $a = b = 2$):

Rekenregel 3. *Als ab een deler is van ac , dan is b een deler van c .*

Het bewijs is eenvoudig: als ab een deler is van ac , dan is $ab \neq 0$ (dus $a \neq 0$ en $b \neq 0$) en is er een geheel getal d zodat $d \cdot ab = ac$. Omdat a ongelijk aan nul is, mogen we a links en rechts wegdelven. Dus geldt $d \cdot b = c$ en dat betekent (aangezien $b \neq 0$) precies weer dat b een deler is van c .

Laten we eens kijken wat er gebeurt als we twee getallen optellen. Stel dat we bijvoorbeeld twee even getallen optellen. Dan komt daar weer een even getal uit. Als we een even en een oneven getal bij elkaar optellen, dan komt er juist een oneven getal uit. Een even getal is natuurlijk niets anders dan een getal dat deelbaar is door 2; een oneven getal is juist niet deelbaar door 2. Kunnen we 2 nu vervangen door een willekeurig getal? Stel dat we twee getallen optellen die allebei deelbaar zijn door a . Is het resultaat dan deelbaar door a ? En wat als we een getal dat deelbaar is door a optellen bij een getal dat niet deelbaar is door a ?

Eerst maar eens twee getallen die deelbaar zijn door a , zeg ak en al . Als we die optellen, krijgen we $ak + al = a(k + l)$ en dat is weer deelbaar door a . Natuurlijk geldt hetzelfde als we het ene getal van het andere aftrekken: $ak - al = a(k - l)$. Dat is ook weer deelbaar door a .

Stel nu dat we ak optellen bij een getal n dat niet deelbaar is door a . Noem de uitkomst l . Dan geldt $l - ak = n$. Dus als l deelbaar is door a , dan is (volgens wat we net hebben bewezen) n ook deelbaar door a . Maar we hadden juist gezegd dat n niet deelbaar was door a . Conclusie: l is ook niet deelbaar door a . Hetzelfde geldt als we ak juist aftrekken van een getal n dat niet deelbaar is door a : dan is de uitkomst ook niet deelbaar door a .

Dit alles vatten we samen in de volgende rekenregel:

Rekenregel 4. *Als a een deler is van m en van n , dan is a een deler van $m + n$ en ook van $m - n$. Als a wel een deler is van m , maar niet van n , dan is a geen deler van $m + n$ en ook niet van $m - n$.*

We kunnen dit ook als volgt samenvatten. Stel a is een deler van m . Dan is a een deler van n precies dan als a een deler is van $m + n$. En a is een deler van n precies dan als a een deler is van $m - n$.

Voorbeeld 6. *Bewijs dat er geen priemgetallen p , q en r bestaan zodat $p^2 + q^2 = r^2$.*

Oplossing. We gaan eerst eens even wat priemgetallen invullen om te kijken wat er gebeurt. We maken een tabel van de waarden van $p^2 + q^2$ voor verschillende priemgetallen p en q :

	$q = 2$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 7$
$p = 2$	8	13	29	53
$p = 3$	13	18	34	58
$p = 5$	29	34	50	74
$p = 7$	53	58	74	98

Dit zijn inderdaad allemaal geen kwadraten van priemgetallen. Wat opvalt is dat veel waarden even zijn. Dat is logisch: als je de kwadraten van twee oneven priemgetallen bij elkaar optelt, dan wordt de uitkomst even. Maar ook wordt de uitkomst dan minstens $3^2 + 3^2 = 18$, terwijl het slechts 4 mag zijn als r een even priemgetal is. Dus we kunnen het geval dat p en q allebei oneven zijn, uitsluiten. Als p en q allebei even zijn, dan zijn ze allebei gelijk aan 2 en we zien al in de tabel dat dat ook niet kan. Dus we hoeven nu alleen nog maar te kijken naar het geval dat precies één van p en q even is en de ander oneven. Laten we zeggen dat $q = 2$, terwijl p juist oneven is. Dan is r ook oneven.

Nu gaan we de vergelijking op een handige manier anders schrijven. Er geldt

$$p^2 = r^2 - q^2 = r^2 - 2^2 = (r - 2)(r + 2).$$

Volgens rekenregel 2 is p een deler van minstens één van $r - 2$ en $r + 2$. Als ze allebei deelbaar zijn door p , dan is p volgens rekenregel 4 ook een deler van $(r + 2) - (r - 2)$ en dat is gelijk aan 4. Maar p is oneven en 4 heeft geen oneven priemdelers, dus dit kan niet. Omdat $(r - 2)(r + 2) = p^2$, mag $(r - 2)(r + 2)$ alleen priemfactoren p bevatten, maar de twee factoren mogen dus niet allebei deelbaar zijn door p . Aangezien $r + 2$ groter is dan

$r - 2$, moet nu gelden $r - 2 = 1$ en $r + 2 = p^2$. Maar dat betekent $r = 3$ en $p^2 = 5$. Echter, 5 is geen kwadraat. Dus ook dit kan niet.

We hebben nu laten zien dat er geen enkele mogelijkheid is waarop voor drie priemgetallen p , q en r kan gelden $p^2 + q^2 = r^2$. \square

Voorbeeld 7. *Vind alle gehele getallen n waarvoor $3n^2 + n - 2$ een deler is van $n^3 + 3$.*

Oplossing. Als je eens wat verschillende getallen n invult en daarvoor $3n^2 + n - 2$ uitrekent, dan valt het je misschien op dat dit getal steeds deelbaar is door $n + 1$. Inderdaad blijken we $3n^2 + n - 2$ te kunnen ontbinden als $(n + 1)(3n - 2)$. Als $3n^2 + n - 2$ een deler is van $n^3 + 3$, dan is dus in elk geval ook $n + 1$ een deler van $n^3 + 3$. We gaan nu eerst maar eens proberen om alle gehele getallen n te vinden waarvoor $n + 1$ een deler is van $n^3 + 3$.

Allereerst moet er natuurlijk gelden dat $n + 1 \neq 0$ (oftewel $n \neq -1$). We willen nu rekenregel 4 toepassen op $n^3 + 3$ om andere uitdrukkingen te vinden waar $n + 1$ ook een deler van is. Hiervoor maken we geschikte veelvouden van $n + 1$. Om te beginnen is $n^2(n + 1) = n^3 + n^2$ deelbaar door $n + 1$. Met behulp van rekenregel 4 vinden we dan dat $n + 1$ een deler is van $(n^3 + n^2) - (n^3 + 3) = n^2 - 3$. Nu kijken we naar $n(n + 1) = n^2 + n$, waar $n + 1$ natuurlijk ook een deler van is. Met rekenregel 4 volgt hieruit dat $n + 1$ een deler is van $(n^2 + n) - (n^2 - 3) = n + 3$. Nog een keertje rekenregel 4 toepassen vertelt ons dat $n + 1$ een deler is van $(n + 3) - (n + 1) = 2$.

Nu heeft 2 slechts vier delers, namelijk 1, 2, -1 en -2 . Dus $n + 1 = 1$, $n + 1 = 2$, $n + 1 = -1$ of $n + 1 = -2$. Daaruit volgt $n = 0$, $n = 1$, $n = -2$ of $n = -3$. We hebben nu vier kandidaatoplossingen voor n gevonden, maar we moeten nog wel even controleren of dit inderdaad allemaal oplossingen zijn. Dus we vullen alle mogelijkheden nog even in.

- $n = 0$: dan geldt $3n^2 + n - 2 = -2$ en $n^3 + 3 = 3$, maar -2 is geen deler van 3.
- $n = 1$: dan geldt $3n^2 + n - 2 = 2$ en $n^3 + 3 = 4$, en 2 is inderdaad een deler van 4.
- $n = -2$: dan geldt $3n^2 + n - 2 = 8$ en $n^3 + 3 = -5$, maar 8 is geen deler van -5 .
- $n = -3$: dan geldt $3n^2 + n - 2 = 22$ en $n^3 + 3 = -24$, maar 22 is geen deler van -24 .

Er is dus precies één oplossing, namelijk $n = 1$. \square

5.1 Opgaven

Opgave 40. *Laat n een geheel getal zijn. Bewijs met behulp van rekenregel 4 dat een deler van n die groter is dan 1, nooit een deler is van $n + 1$.*

Uitwerking. Laat d een deler van n zijn die groter is dan 1. Dan is d geen deler van 1, dus volgens rekenregel 4 is d geen deler van $n + 1$. \square

Opgave 41. Zij p een oneven priemgetal. Veronderstel dat voor zekere gehele m en n geldt dat zowel $m^2 + 2mn + n^2$ als $m^2 - 2mn + n^2$ deelbaar is door p . Bewijs dat m en n allebei deelbaar zijn door p .

Uitwerking. Met rekenregel 4 zien we dat p ook een deler is van $m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2) = 4mn$. Vanwege rekenregel 2 is dus p een deler van 4, m of n . Omdat 4 geen oneven priemdelers heeft, is p een deler van m of van n . We mogen zonder verlies van algemeenheid wel aannemen dat p een deler is van n . Dan is p ook een deler van $n(2m + n) = 2mn + n^2$, dus met rekenregel 4 is $m^2 + 2mn + n^2 - n(2m + n) = m^2$ ook deelbaar door p . Dus m is deelbaar door p , dus m en n zijn allebei deelbaar door p . \square

Alternatieve uitwerking. Er geldt $m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2$ en $m^2 - 2mn + n^2 = (m-n)^2$. We zien met rekenregel 2 dat zowel $m - n$ als $m + n$ deelbaar is door p . Met rekenregel 4 zijn nu ook $2m = (m - n) + (m + n)$ en $2n = (m + n) - (m - n)$ deelbaar door p . Omdat p oneven is, betekent dit dat ook m en n deelbaar moeten zijn door p . \square

Opgave 42. Voor welke gehele getallen a geldt dat $a + 1$ een deler is van $a^2 - a + 1$?

Uitwerking. Stel $a + 1$ is een deler van $a^2 - a + 1$. Dan is $a + 1 \neq 0$. Omdat $a + 1$ een deler is van $a(a + 1) = a^2 + a$, geldt dan volgens rekenregel 4 dat $a + 1$ een deler is van $(a^2 + a) - (a^2 - a + 1) = 2a - 1$. Verder is $a + 1$ een deler van $2(a + 1) = 2a + 2$, dus met behulp van rekenregel 4 zien we nu dat $a + 1$ een deler is van $(2a + 2) - (2a - 1) = 3$. Dus $a + 1 = 1$, $a + 1 = 3$, $a + 1 = -1$ of $a + 1 = -3$. Hieruit volgt $a = 0$, $a = 2$, $a = -2$ of $a = -4$. We controleren of dit daadwerkelijk oplossingen zijn:

- $a = 0$: dan geldt $a + 1 = 1$ en $a^2 - a + 1 = 1$, en 1 is inderdaad een deler van 1.
- $a = 2$: dan geldt $a + 1 = 3$ en $a^2 - a + 1 = 3$, en 3 is inderdaad een deler van 3.
- $a = -2$: dan geldt $a + 1 = -1$ en $a^2 - a + 1 = 7$, en -1 is inderdaad een deler van 7.
- $a = -4$: dan geldt $a + 1 = -3$ en $a^2 - a + 1 = 21$, en -3 is inderdaad een deler van 21.

We hebben dus vier oplossingen gevonden: $a = 0$, $a = 2$, $a = -2$ en $a = -4$. \square

Opgave 43. Laat k een natuurlijk getal zijn zodat 15 een deler is van $(3k + 2)(5k + 2)$. Bewijs dat 3 een deler is van $k + 1$ en 5 een deler van $k - 1$.

Uitwerking. Omdat 3 een deler is van 15, is 3 een deler van $(3k + 2)(5k + 2)$. Volgens rekenregel 2 is 3 nu een deler van $3k + 2$ of van $5k + 2$, want 3 is een priemgetal. Maar rekenregel 4 vertelt ons dat $3k + 2$ niet deelbaar is door 3 (want $3k$ is deelbaar door 3 en 2 is dat juist niet), dus 3 moet een deler zijn van $5k + 2$. Omdat 3 ook een deler is van $3(2k + 1) = 6k + 3$, is volgens rekenregel 4 nu 3 ook een deler van $(6k + 3) - (5k + 2) = k + 1$.

Op dezelfde manier zien we dat 5 een deler moet zijn van $3k + 2$ of $5k + 2$ en dat $5k + 2$ niet deelbaar is door 5. Dus 5 is een deler van $3k + 2$. Met behulp van rekenregel 4 zien we dat 5 een deler moet zijn van $(3k + 2) - 5 = 3k - 3$. Dat is gelijk aan $3(k - 1)$. Opnieuw rekenregel 2 toepassen laat zien dat 5 een deler moet zijn van 3 of van $k - 1$. Maar 5 is natuurlijk geen deler van 3, dus 5 moet wel een deler zijn van $k - 1$. \square

Opgave 44. *Vind alle paren priemgetallen p en q waarvoor $p^2 - 2q^2 = 1$.*

Uitwerking. We herschrijven de vergelijking als $(p - 1)(p + 1) = 2q^2$. Van de twee factoren links moet er minstens één even zijn, omdat de rechterkant ook even is. Dus p is oneven. Daaruit volgt dat allebei de factoren links even zijn, zodat 4 een deler is van $2q^2$. Met rekenregel 3 zien we dat 2 nu een deler is van q^2 , dus dat q even is. Omdat q ook een priemgetal is, geldt $q = 2$. Dus $p^2 = 2q^2 + 1 = 9$, waaruit volgt $p = 3$. Dit is dus de enige oplossing. \square

Opgave 45. *Stel dat voor gehele getallen a , b , c en d geldt dat $a - c$ een deler is van $ab + cd$. Bewijs dat $a - c$ ook een deler is van $ad + bc$.*

Uitwerking. Volgens rekenregel 1 is $a - c$ een deler van $(a - c)d = ad - cd$. Volgens rekenregel 4 is $a - c$ dan ook een deler van $(ab + cd) + (ad - cd) = ab + ad$. Met rekenregel 1 zien we dat $a - c$ een deler is van $(a - c)b = ab - bc$. We passen nu weer rekenregel 4 toe: $a - c$ is ook een deler van $(ab + ad) - (ab - bc) = ad + bc$. Dit is precies wat we moesten bewijzen. \square

Opgave 46 (Finale 2001). *Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 13x + 10}{2x^2 - 9x}$. Bepaal alle positieve gehele getallen x waarvoor $f(x)$ een geheel getal is.*

Uitwerking. Als voor zekere x geldt dat $f(x)$ een geheel getal is, dan moet $2x^2 - 9x$ een deler zijn van $2x^3 - 6x^2 + 13x + 10$. Omdat x een deler is van $2x^2 - 9x = x(2x - 9)$, moet x in elk geval ook een deler zijn van $2x^3 - 6x^2 + 13x + 10$. Maar x is een deler van $2x^3 - 6x^2 + 13x$, dus volgens rekenregel 4 moet x een deler zijn van 10. Dat geeft vier mogelijkheden voor x : 1, 2, 5 en 10 (immers, x is positief volgens de opgave). We vullen ze alle vier nog even in om te kijken welke van deze vier daadwerkelijk een geheel getal geven voor $f(x)$: $f(1) = \frac{19}{-7}$ is niet geheel, $f(2) = \frac{28}{-10}$ is niet geheel, $f(5) = \frac{175}{5} = 35$ is wel geheel, $f(10) = \frac{1540}{110} = 14$ is wel geheel. De oplossingen zijn dus $x = 5$ en $x = 10$. \square

6 Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11

Van grote getallen is het vaak niet makkelijk om de priemontbinding te vinden. Er bestaan wel trucjes om ook van grote getallen te zien of ze deelbaar zijn door bepaalde kleine (priem)getallen. Zo kun je in één oogopslag zien dat het getal 123456 deelbaar is door 2, omdat het laatste cijfer even is. Je kunt ook zien dat 123456 niet deelbaar is door 5: alleen getallen die eindigen op een 5 of een 0 zijn deelbaar door 5. Waarom is dat eigenlijk zo? En kunnen we dit ook voor deelbaarheid door andere getallen?

Een *getal* bestaat uit een aantal *cijfers*. Cijfers zitten altijd tussen de 0 en de 9. Zo is bijvoorbeeld 321 geen cijfer, maar een getal. Het getal 321 bestaat uit de cijfers 3, 2 en 1. En het getal 9 heeft precies één cijfer, namelijk het cijfer 9. We rekenen normaal gesproken met getallen: die kun je optellen, vermenigvuldigen, etc. Met cijfers kun je dat niet zomaar doen: wat is bijvoorbeeld het cijfer 3 opgeteld bij het cijfer 8? Dat is in elk geval geen cijfer! Soms is het toch handig om naar de cijfers van een getal te kijken. Daarvoor gebruiken we speciale notatie. Zo schrijven we \overline{abc} voor het getal dat bestaat uit de cijfers a , b en c . We schrijven hiervoor liever niet abc zonder streep, want dan kan het verward worden met het product van de *getallen* a , b en c .

In het algemeen gebruiken we de notatie $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ voor het getal dat bestaat uit de cijfers $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Je weet dat a_0 het aantal eenheden aangeeft, a_1 het aantal tientallen, enzovoorts. Dus in feite geldt

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Zo is $\overline{123456} = 1 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$. Normaal schrijven we dat natuurlijk gewoon als 123456.

We kunnen nu heel makkelijk inzien waarom we alleen naar het laatste cijfer van een getal hoeven te kijken om te bepalen of het deelbaar is door 2 of door 5. Er geldt namelijk

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 0} + a_0 = 10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0.$$

Door rekenregel 4 uit de vorige sectie toe te passen, zien we dat $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$ deelbaar is door 2 precies dan als a_0 deelbaar is door 2. En hetzelfde geldt voor 5: het getal $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$ is deelbaar door 5 precies dan als a_0 deelbaar is door 5.

Jammer genoeg is nu ook meteen duidelijk dat dit alleen voor delers van 10 werkt en dat zijn alleen 1, 2, 5 en 10. Toch kunnen we met behulp van deze notatie ook een trucje bedenken om te bepalen of een getal deelbaar is door 3.

Kijk nog eens hiernaar:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Al die factoren 10, 100, 1000, etc. zijn niet deelbaar door 3. Dat is jammer: we willen daar graag iets hebben staan dat wel deelbaar is door 3. Dat kunnen we voor elkaar krijgen

door overal eentje af te halen: 9, 99, 999, etc. zijn wel allemaal deelbaar door 3. (Immers, $9999 \dots 999 = 3 \times 3333 \dots 333$.) Dus laten we ons getal nog een beetje anders schrijven:

$$\begin{aligned} \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} &= a_n \cdot (10^n - 1) + a_n + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + a_{n-1} + \dots + a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0 \\ &= (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot 9) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Het linkerstuk is nu deelbaar door 3. Met rekenregel 4 krijgen we: het geheel is deelbaar door 3 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 3. Het rechterstuk is $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ en dat is de som van de cijfers van ons getal. Dus een getal is deelbaar door 3 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.

Nu krijgen we het trucje voor deelbaarheid door 9 cadeau. In die uitdrukking van net is het linkerstuk namelijk niet alleen deelbaar door 3, maar ook door 9. (Want $9999 \dots 999 = 9 \times 1111 \dots 111$.) Dus op precies dezelfde manier kunnen we laten zien dat een getal deelbaar is door 9 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 9.

Ten slotte gaan we nog een trucje bedenken voor deelbaarheid door 11. Laten we eerst maar eens kijken naar een getal van drie cijfers. Dat kunnen we schrijven als

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Als we weer 1 afhalen van 100, dan krijgen we 99 en dat is deelbaar door 11. Maar bij 10 lukt dat niet: 9 is niet deelbaar door 11. Gelukkig is $10 + 1$ wel deelbaar door 11. Dus we schrijven ons getal als

$$\overline{cba} = (99c + 11b) + (c - b + a).$$

Nu is het linkerstuk weer deelbaar door 11. Dus het getal is deelbaar door 11 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 11. Hoe ziet dat rechterstuk eruit voor getallen met meer cijfers? Het getal $10^3 - 1 = 999$ is helaas weer niet deelbaar door 11, maar $10^3 + 1 = 1001 = 11 \cdot 91$ wel. Dus is het handig om een getal van vier cijfers zo te schrijven:

$$\overline{dcba} = (1001d + 99c + 11b) + (-d + c - b + a).$$

Daar begint een patroon in te komen! Het lijkt erop dat je de cijfers van een getal om en om moet optellen en aftrekken; als de uitkomst deelbaar is door 11, dan is het getal zelf deelbaar door 11. Die uitkomst noemen we trouwens de *alternerende* som van de cijfers.

Het belangrijkste ingrediënt van ons vermoeden is dat je bij de machten van 10 de ene keer 1 moet optellen en de andere keer 1 moet aftrekken om een getal deelbaar door 11 te krijgen. Dat gaan we eerst maar eens bewijzen.

We bewijzen eerst met inductie naar n dat $10^{2n} - 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n .

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $10^{2n} - 1 = 99$ en dat is deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$. We weten dan dat $10^{2k} - 1$ deelbaar is door 11. We gaan dit eens vermenigvuldigen met 100, dan is het nog steeds deelbaar door 11:

$$100 \cdot (10^{2k} - 1) = 100 \cdot 10^{2k} - 100 = 10^{2k+2} - 1 - 99.$$

We passen rekenregel 4 weer toe: 99 is deelbaar door 11 en $100 \cdot (10^{2k} - 1)$ is deelbaar door 11, dus $10^{2k+2} - 1$ is deelbaar door 11. Dat is wat we wilden bewijzen voor $n = k + 1$. Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat $10^{2n} - 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n .

Nu bewijzen we met inductie naar n dat $10^{2n-1} + 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n .

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $10^{2n-1} + 1 = 11$ en dat is natuurlijk deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$. We weten dan dat $10^{2k-1} + 1$ deelbaar is door 11. Opnieuw vermenigvuldigen we met 100:

$$100 \cdot (10^{2k-1} + 1) = 100 \cdot 10^{2k-1} + 100 = 10^{2k+1} + 1 + 99.$$

Hier volgt met behulp van rekenregel 4 uit dat $10^{2k+1} + 1$ deelbaar is door 11 en dat is wat we wilden bewijzen voor $n = k + 1$. Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat $10^{2n-1} + 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n .

Nu kunnen we bewijzen dat ons trucje met de alternerende som werkt. We doen het eerst voor een getal met een even aantal cijfers: $a_{2n-1}, a_{2n-2}, \dots, a_1$ en a_0 . Er geldt

$$\begin{aligned} \overline{a_{2n-1}a_{2n-2}\dots a_1a_0} &= a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + a_{2n-2} \cdot 10^{2n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + a_{2n-2} \cdot (10^{2n-2} - 1) + \dots + a_1 \cdot 11) \\ &\quad + (-a_{2n-1} + a_{2n-2} - \dots - a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Het linkerstuk is helemaal deelbaar door 11, dus we concluderen dat het hele getal deelbaar is door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Nu doen we hetzelfde voor een getal met een oneven aantal cijfers:

$$\begin{aligned} \overline{a_{2n}a_{2n-1}\dots a_1a_0} &= a_{2n} \cdot 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (a_{2n} \cdot (10^{2n} - 1) + a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot 11) \\ &\quad + (a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Ook hier zien we dat het linkerstuk deelbaar is door 11, zodat het rechterstuk (de alternerende som van de cijfers) deelbaar is door 11 precies dan als het hele getal deelbaar is door 11.

We zetten alle trucjes nog even op een rijtje.

Laat N een natuurlijk getal zijn.

- N is deelbaar door 2 precies dan als het laatste cijfer van N deelbaar is door 2.
- N is deelbaar door 5 precies dan als het laatste cijfer van N deelbaar is door 5.
- N is deelbaar door 3 precies dan als de som van de cijfers van N deelbaar is door 3.
- N is deelbaar door 9 precies dan als de som van de cijfers van N deelbaar is door 9.
- N is deelbaar door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Bedenk weer even dat 0 deelbaar is door elk natuurlijk getal. Dus als een getal eindigt op een 0, dan is het getal deelbaar door 5. En als de alternerende som van de cijfers gelijk is aan 0, dan is het getal deelbaar door 11.

Voorbeeld 8. *Bepaal de priemontbinding van het getal $n = 10780$.*

Oplossing. In elk geval is n deelbaar door 2 en door 5, dus we kunnen het schrijven als $n = 1078 \cdot 2 \cdot 5$. Nu zien we dat er nog een factor 2 in zit: $n = 539 \cdot 2^2 \cdot 5$. De alternerende som van de cijfers van 539 is $5 - 3 + 9 = 11$, wat deelbaar is door 11, dus n is deelbaar door 11. We krijgen $n = 49 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5$. Nu zien we dat de priemontbinding van n gelijk is aan $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. \square

Voorbeeld 9. *Vind alle natuurlijke getallen $n \leq 6000$ waarvoor geldt dat n precies 144 keer de som van zijn cijfers is.*

Oplossing. We noemen de som van de cijfers van n even $S(n)$. Dan geldt $S(n) \cdot 144 = n$. Nu gaan we onze deelbaarheidstrucjes gebruiken. Het getal 144 is deelbaar door 9 (want $1 + 4 + 4 = 9$). Dus 9 is een deler van de linkerkant van de vergelijking en daarom ook van de rechterkant, dus 9 is een deler van n . Maar dan is 9 ook een deler van de som van de cijfers van n en die hadden we $S(n)$ genoemd. De linkerkant is dus deelbaar door $9 \cdot 144 = 1296$. Daaruit volgt dat n een veelvoud is van 1296.

Dat wil nog niet zeggen dat voor elk veelvoud n van 1296 geldt: $S(n) \cdot 144 = n$. We hebben alleen nog laten zien dat geen andere getallen dan veelvouden van 1296 kunnen voldoen, maar niet dat al die veelvouden daadwerkelijk voldoen. Gelukkig zijn er slechts enkele veelvouden van 1296 kleiner dan 6000, dus we kunnen ze allemaal even uitproberen. Dit doen we in de volgende tabel.

n	$S(n)$	$S(n) \cdot 144$	is gelijk aan n ?
1296	18	2592	nee
2592	18	2592	ja
3888	27	3888	ja
5184	18	2592	nee

We lezen nu gemakkelijk in de tabel af dat er precies twee waarden van n kleiner dan 6000 zijn waarvoor geldt $S(n) \cdot 144 = n$, namelijk $n = 2592$ en $n = 3888$. \square

Het uitproberen van de vier mogelijkheden hoort echt nog bij het bewijs. Zonder dat tabelletje weten we niet precies welke van de vier getallen voldoen en zijn we dus nog niet klaar met de oplossing. Het is wel belangrijk dat we zeker weten dat dit de enige vier kandidaten zijn, anders zouden we nog veel meer getallen moeten uitproberen. In het eerste deel van het bewijs laten we zien dat er slechts vier kandidaten zijn; daarna maken we het bewijs af door die vier één voor één uit te proberen.

6.1 Opgaven

Opgave 47. *Bepaal de priemontbinding van het getal $n = 30030$.*

Uitwerking. Met behulp van de trucjes zien we dat n deelbaar is door 2, 3, 5 en 11. Als we al deze factoren eruit delen, houden we 91 over en dat is gelijk aan $7 \cdot 13$. Dus de priemontbinding van n is $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. \square

Opgave 48. *Vind een getal dat bestaat uit alleen maar enen en dat deelbaar is door 99.*

Uitwerking. Het getal bestaande uit 18 enen voldoet: de som van de cijfers is 18 en dus deelbaar door 9; de alternerende som van de cijfers is 0 en dus deelbaar door 11. Hieruit volgt dat het getal deelbaar is door zowel 9 als 11 en dus door 99, want het bevat kennelijk minstens 2 priemfactoren 3 en minstens één priemfactor 11. \square

Opgave 49. *Bepaal cijfers a en b (met $a \neq 0$) zo dat 72 een deler is van $\overline{a679b}$.*

Uitwerking. Omdat 9 een deler is van 72, moet 9 ook een deler zijn van $\overline{a679b}$ en dus van de som van de cijfers van $\overline{a679b}$. Dus 9 moet een deler zijn van $a + 22 + b$. Dat betekent dat $a + b + 22 = 27$ (dus $a + b = 5$) of $a + b + 22 = 36$ (dus $a + b = 14$). Kleinere veelvoud van 9 vallen af omdat a en b niet negatief kunnen zijn en grotere veelvoud van 9 vallen af omdat $a + b \leq 9 + 9 = 18$.

Verder is $\overline{a679b} = 1000 \cdot \overline{a6} + \overline{79b}$. Omdat 1000 deelbaar is door 8 en $\overline{a679b}$ ook deelbaar moet zijn door 8 (want 8 is een deler van 72), moet $\overline{79b}$ deelbaar zijn door 8. Dat kan alleen als $b = 2$. Daaruit volgt nu meteen $a = 5 - 2 = 3$ (het geval $a = 14 - 2 = 12$ valt af).

Deze cijfers voldoen ook daadwerkelijk, want $36792 = 72 \cdot 511$. \square

Opgave 50. *Het getal n bestaat uit precies 300 enen en verder een aantal nullen. Kan n een kwadraat zijn?*

Uitwerking. De som van de cijfers van n is 300. Dit is deelbaar door 3, maar niet door 9. Dus n bevat precies één priemfactor 3, terwijl kwadraten altijd van elk priemgetal een even aantal bevatten. Dus n is geen kwadraat. \square

Opgave 51. *Vind een getal n met de volgende eigenschap: als je de som van de cijfers van n vermenigvuldigt met 15 en bij de uitkomst 135 optelt, krijg je precies n .*

Uitwerking. Noem de som van de cijfers van n even $S(n)$. We zijn op zoek naar een getal n met de eigenschap $S(n) \cdot 15 + 135 = n$. Omdat zowel 15 als 135 deelbaar is door 3, moet n ook deelbaar zijn door 3. Maar dan is $S(n)$ deelbaar door 3, dus is $S(n) \cdot 15$ deelbaar door 9. Omdat ook 135 deelbaar is door 9, volgt hieruit dat n deelbaar is door 9. Dus $S(n)$ is deelbaar door 9. Nu zien we dat $S(n) \cdot 15$ deelbaar is door $9 \cdot 15 = 135$. Uiteraard is 135 ook deelbaar door 135, dus ook n is deelbaar door 135. Door de veelvoud van 135 af te gaan, vind je dat $2 \cdot 135 = 270$ voldoet: de som van de cijfers is 9 en $9 \cdot 15 + 135 = 270$. \square

Opgave 52. *Een natuurlijk getal n van vier cijfers heeft de eigenschap dat de cijfers van klein naar groot gesorteerd vier opeenvolgende getallen zijn. Verder is gegeven dat n deelbaar is door 9 en door 11. Vind alle mogelijkheden voor n .*

Uitwerking. Noem de cijfers (van klein naar groot gesorteerd) $k, k + 1, k + 2, k + 3$. We weten dat de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11. Omdat $(k + 3) + (k + 2) - (k + 1) - k = 4$ en $(k + 3) + (k + 1) - (k + 2) - k = 2$ niet deelbaar zijn door 11, moet gelden dat $k + 3$ en k het eerste en derde cijfer zijn en $k + 2$ en $k + 1$ het tweede en vierde cijfer, of net andersom. Verder is $k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) = 4k + 6$ deelbaar door 9. Daaruit zien we dat k deelbaar is door 3, maar niet door 9. Als $k = 6$, dan is $4k + 6 = 30$ niet deelbaar door 9. Als $k = 3$, dan geldt $4k + 6 = 18$ en dat is inderdaad deelbaar door 9. We hebben nu acht verschillende mogelijkheden voor n : 3465, 6435, 3564, 6534, 4356, 5346, 4653, 5643. \square

7 Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud

We kijken nog eens naar rekenregel 4. Die zegt dat een deler van m en van n ook een deler is van $m + n$. In andere woorden: als m en n een deler gemeen hebben, dan is dit ook een deler van $m + n$. We weten dat elke twee gehele getallen ten minste één positieve deler gemeen hebben, namelijk 1: dit is een deler van elk geheel getal. Soms is dit de enige positieve deler die de getallen gemeen hebben. Zo heeft 15 bijvoorbeeld als positieve

delers 1, 3, 5, en 15, terwijl 8 de positieve delers 1, 2, 4 en 8 heeft. Het enige getal dat bij allebei voorkomt, is 1, dus 1 is de enige positieve deler die 8 en 15 gemeen hebben. De getallen 10 en 15 hebben meer dan één positieve deler gemeen: de positieve delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10 en daarvan zijn 1 en 5 allebei ook een deler van 15. De grootste daarvan is 5. We noemen 5 daarom de *grootste gemene deler* van 10 en 15. Dit korten we ook wel af met *ggd* en soms schrijven we $\text{ggd}(10, 15) = 5$. Zo ook geldt $\text{ggd}(8, 15) = 1$, $\text{ggd}(8, -10) = 2$ en $\text{ggd}(-20, -1000) = 20$. Omdat alle natuurlijke getallen een deler van 0 zijn, geldt bijvoorbeeld $\text{ggd}(3, 0) = 3$ en $\text{ggd}(0, -23) = 23$. De grootste gemene deler van 0 en 0 is niet gedefinieerd.

Terug naar rekenregel 4. We kunnen nu zeggen: de grootste gemene deler van m en n is ook een deler van $m + n$. De grootste gemene deler van m en n is immers een deler van zowel m als n , dus volgens rekenregel 4 ook een deler van $m + n$. Wat is nu $\text{ggd}(m, m + n)$? In elk geval hebben m en $m + n$ al het getal $\text{ggd}(m, n)$ gemeen als deler. Maar misschien hebben ze nog wel een grotere deler gemeen. Noem $\text{ggd}(m, m + n)$ even d . Dan is d dus een deler van m en van $m + n$, dus volgens rekenregel 4 ook van $(m + n) - m = n$. Dus d is een deler van zowel m als n , maar dat betekent dat hij niet groter kan zijn dan $\text{ggd}(m, n)$. Dat was immers de grootste deler die m en n gemeen hadden. Conclusie: $\text{ggd}(m, m + n) = \text{ggd}(m, n)$.

Rekenregel 5. *Voor gehele getallen m en n met $m \neq 0$ geldt: $\text{ggd}(m, m + n) = \text{ggd}(m, n)$. En ook: $\text{ggd}(m, m - n) = \text{ggd}(m, n)$.*

Als we de ggd van wat grotere getallen willen weten, dan is het niet zo handig om eerst alle delers op te moeten schrijven. Het is handiger om dan naar de priemontbinding te kijken. Stel bijvoorbeeld dat we de ggd van 36 en 120 willen weten. We kunnen deze getallen gemakkelijk in priemgetallen ontbinden: $36 = 2^2 \cdot 3^2$ en $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. We zien nu direct dat in de ggd van 36 en 120 in elk geval niet de priemfactor 5 mag voorkomen, want 5 is geen deler van 36. De priemgetallen 2 en 3 moeten er zeker wel in. En deze factoren mogen niet vaker voorkomen dan dat ze in 36 en 120 voorkomen. Dus de priemfactor 2 mag twee keer voorkomen, want hij komt precies twee keer voor in 36; de priemfactor 3 mag maar één keer voorkomen, want hij komt precies één keer voor in 120. Kortom, de grootste gemene deler van 36 en 120 is $2^2 \cdot 3 = 12$.

Wat er hier precies gebeurt, wordt nog iets duidelijker als we de getallen zo schrijven:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \quad \text{en} \quad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

We zorgen dus dat in de priemontbinding van beide getallen dezelfde priemgetallen staan. Omdat 5 niet echt een priemdeler is van 36, geven we hem de exponent 0 (bedenk dat 5^0 gelijk is aan 1). Nu kijken we bij elke priemfactor naar de kleinste exponent. Bij de priemfactor 2 is dat 2, bij de priemfactor 3 is dat 1 en bij de priemfactor 5 is dat 0. Dus de ggd is $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$. Dit is in feite precies het argument van hierboven, maar dan wat overzichtelijker opgeschreven.

We kunnen nu de getallen opschrijven als het product van de ggd en de overige factoren:

$$\begin{aligned}36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3, \\120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5.\end{aligned}$$

Het stuk tussen haakjes is precies de ggd en is bij allebei de getallen hetzelfde. Buiten de haakjes staan juist bij beide getallen verschillende priemfactoren.

Voorbeeld 10. Laat a en b twee natuurlijke getallen zijn. Noem d de grootste gemene deler van a en b . Wat is nu $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$?

Oplossing. Laten we dit eerst even uitproberen op ons voorbeeld van hierboven, met $a = 36$ en $b = 120$, zodat $d = 12$. Dan geldt $\frac{a}{d} = 3$ en $\frac{b}{d} = 10$. Die getallen hebben ggd 1. Verder valt het op dat deze getallen precies het product zijn van de priemfactoren die hierboven buiten de haakjes stonden. Dat is natuurlijk geen toeval. Het getal d is precies het product van de priemgetallen binnen de haakjes, dus $\frac{a}{d}$ is het product van de getallen buiten de haakjes. En de eigenschap van de grootste gemene deler van a en b was nou juist dat de getallen buiten de haakjes bij a geen priemfactoren meer gemeen hadden met de getallen buiten de haakjes bij b . Dus $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ moet wel gelijk zijn aan 1.

Dat schrijven we nog een keertje netjes op. We schrijven $a = d \cdot e$ en $b = d \cdot f$, met $d = \text{ggd}(a, b)$. Als we e en f in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat p een priemdelers zou zijn van zowel e als f , dan zou $d \cdot p$ een deler zijn van $a = d \cdot e$ en ook van $b = d \cdot f$. Maar d is de grootste gemene deler van a en b en $d \cdot p$ is groter, dus dat kan niet. Kortom, e en f hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus $\text{ggd}(e, f) = 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. \square

Een begrip dat een beetje lijkt op de ggd is het *kleinste gemene veelvoud* van twee getallen a en b . Dat is het kleinste natuurlijke getal n dat een veelvoud is van zowel a als b . We korten dit ook wel af tot *kgv* of $\text{kgv}(a, b)$. We kunnen het kgv van twee getallen weer heel makkelijk uit de priemontbinding halen. Laten we nog eens kijken naar 36 en 120. Het kgv van 36 en 120 moet in elk geval een veelvoud worden van $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Het moet natuurlijk ook een veelvoud zijn van $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, dus we moeten de priemfactoren van 36 aanvullen totdat alle priemfactoren van 120 er ook in zitten. Er moet dus een extra 2 bij en nog een 5. Dus $\text{kgv}(36, 120) = 36 \cdot 2 \cdot 5 = 360$. We hadden natuurlijk ook van 120 uit kunnen gaan en daar nog een extra factor 3 aan kunnen toevoegen. Dat geeft gelukkig hetzelfde antwoord: $\text{kgv}(36, 120) = 120 \cdot 3 = 360$.

Ook hier kan het makkelijker zijn om de priemontbindingen even zo op te schrijven dat in beide dezelfde priemgetallen staan:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \quad \text{en} \quad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

Omdat al deze priemfactoren net zo vaak moeten voorkomen in het kgv als ze in één van beide getallen doen, moeten we nu kijken naar de grootste exponenten. De grootste exponent bij de factor 2 is 3, de grootste exponent bij de factor 3 is 2 en de grootste exponent bij de factor 5 is 1. Dus $\text{kgv}(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Zo ook is bijvoorbeeld $\text{kgv}(4, 8) = 8$ en $\text{kgv}(-6, 10) = 30$. De kgv van 0 en 3 is niet gedefinieerd, want er bestaat geen positief veelvoud van 0.

Voorbeeld 11. *Laat n een natuurlijk getal zijn. Bewijs dat geldt: $\text{kgv}(n, n + 1) = n^2 + n$.*

Oplossing. We maken eerst eens een tabelletje om te kijken of dit waar is voor wat kleine waarden van n :

n	priemontbinding van n	priemontbinding van $n + 1$	$\text{kgv}(n, n + 1)$	$n^2 + n$
1	1	2	2	2
2	2	3	6	6
3	3	2^2	12	12
4	2^2	5	20	20
5	5	$2 \cdot 3$	30	30
6	$2 \cdot 3$	7	42	42

We bepalen steeds het kgv door aan de priemontbinding van n de priemfactoren van $n + 1$ toe te voegen die nog niet (vaak genoeg) voorkomen. Hier valt het op dat dit steeds alle priemfactoren van $n + 1$ zijn. De getallen n en $n + 1$ hebben in bovenstaande tabel nooit priemfactoren gemeen. Maar eigenlijk wisten we dat al! Kijk maar eens terug naar opgave 40.

Nu is het makkelijk om het af te maken. Het kgv van n en $n + 1$ moet alle priemfactoren van n en $n + 1$ bevatten, net zo vaak als ze voorkomen in minstens één van beide. Maar n en $n + 1$ hebben geen priemfactoren gemeen, dus we kunnen het kgv vinden door simpelweg n en $n + 1$ te vermenigvuldigen. Dat geeft $\text{kgv}(n, n + 1) = n(n + 1) = n^2 + n$. \square

7.1 Opgaven

Opgave 53. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n de grootste gemene deler van n^2 en $(n + 1)^2$ gelijk is aan 1.*

Uitwerking. Stel dat p een priemdelers is van n^2 en $(n + 1)^2$. Dan is het ook een priemdelers van n en van $n + 1$. Maar n en $n + 1$ hebben geen priemdelers gemeen. De grootste gemene deler van n^2 en $(n + 1)^2$ bevat daarom geen priemfactoren en moet dus wel gelijk zijn aan 1. \square

Opgave 54. Laat m , n en k gehele getallen zijn met $m \neq 0$. Bewijs dat $\text{ggd}(m, n + km) = \text{ggd}(m, n)$.

Uitwerking. We passen herhaald rekenregel 5 toe. Als $k > 0$, geldt

$$\text{ggd}(m, n) = \text{ggd}(m, n + m) = \text{ggd}(m, n + 2m) = \dots = \text{ggd}(m, n + km).$$

Als $k < 0$, geldt

$$\text{ggd}(m, n) = \text{ggd}(m, n - m) = \text{ggd}(m, n - 2m) = \dots = \text{ggd}(m, n + km).$$

Als $k = 0$, dan staat er $\text{ggd}(m, n) = \text{ggd}(m, n)$ en dat is natuurlijk ook waar. \square

Opgave 55. Laat a en b gehele getallen zijn zodat $\text{ggd}(a, b) = 1$. Bewijs dat $\text{ggd}(a - b, a + b) = 1$ of $\text{ggd}(a - b, a + b) = 2$.

Uitwerking. Volgens rekenregel 5 geldt $\text{ggd}(a - b, a + b) = \text{ggd}(a - b, (a - b) + (a + b)) = \text{ggd}(a - b, 2a)$ en $\text{ggd}(a - b, a + b) = \text{ggd}(a - b, (a + b) - (a - b)) = \text{ggd}(a - b, 2b)$. Dus de grootste gemene deler van $a - b$ en $a + b$ is in elk geval ook een deler van $2a$ en een deler van $2b$. Maar a en b hebben geen delers groter dan 1 gemeen, dus de grootste gemene deler van $2a$ en $2b$ is 2. Dus $\text{ggd}(a - b, a + b)$ kan alleen maar 1 of 2 zijn: dat zijn de enige getallen die ook delers van $2a$ en $2b$ zijn. \square

Opgave 56. Laat n en k gehele getallen zijn. Bewijs dat $\text{ggd}(n, 2k + 1) = \text{ggd}(2n, 2k + 1)$.

Uitwerking. De ggd bevat alleen priemfactoren die beide getallen gemeenschappelijk hebben. Omdat $2k + 1$ oneven is, hebben $2n$ en $2k + 1$ geen factor 2 gemeenschappelijk. Om de ggd van $2n$ en $2k + 1$ te bepalen, kunnen we dus net zo goed die factor 2 in $2n$ buiten beschouwing laten. Dan kijken we in feite naar de gemeenschappelijke priemfactoren van n en $2k + 1$. Dus $\text{ggd}(n, 2k + 1) = \text{ggd}(2n, 2k + 1)$. \square

Opgave 57. Laat a en b positieve oneven getallen zijn met $a < b$. Bewijs dat $2 \text{ggd}(a, b) \leq b - a$.

Uitwerking. Met rekenregel 5 geldt $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(a, b - a)$. De ggd d van a en b is dus een deler van $b - a$. Omdat d oneven is maar $b - a$ even, is $2d$ nu ook een deler van $b - a$. Omdat $b - a$ positief is, geldt er dus dat $2d \leq b - a$. \square

Opgave 58. Laat a en b natuurlijke getallen zijn. Bewijs dat geldt: $\text{ggd}(a, b) \cdot \text{kgv}(a, b) = a \cdot b$. Bedenk hiermee een nieuwe oplossing voor voorbeeld 11.

Uitwerking. Net als in voorbeeld 10 noemen we $d = \text{ggd}(a, b)$ en schrijven we $a = d \cdot e$, $b = d \cdot f$. Om de kgv te vinden, gaan we a uitbreiden tot een veelvoud van a dat precies ook alle priemfactoren van b vaak genoeg bevat. De priemfactoren uit de ontbinding van b die nog niet (voldoende vaak) voorkomen in a , vormen samen precies f . Immers, alle priemfactoren van d komen al in a voor en de priemfactoren van f zitten niet ook nog in e , dus die moeten we allemaal nog toevoegen om uit a de kgv van a en b te krijgen. Kortom, $\text{kgv}(a, b) = a \cdot f$. Dus $\text{ggd}(a, b) \cdot \text{kgv}(a, b) = d \cdot a \cdot f = a \cdot b$.

In plaats hiervan kunnen we ook naar de priemontbindingen van a en b kijken. Om de ggd te vinden, moeten we bij elke priemfactor steeds de kleinste exponent kiezen. Om de kgv te vinden, moeten we juist steeds de grootste exponent kiezen. In het ene geval kiezen we dus de exponent die in de priemontbinding van a staat, in het andere geval juist de exponent die in de priemontbinding van b staat. De ene keer is misschien de exponent van a het grootste en die van b het kleinste; de andere keer kan het net andersom zijn. Maar in elk geval kies je ze allebei precies één keer. (Dit geldt ook als beide exponenten toevallig even groot zijn.) Als we nu de ggd en het kgv met elkaar vermenigvuldigen, dan worden de exponenten bij elk priemgetal opgeteld. Dat zijn dus precies de exponenten in de priemontbindingen van a en b . Dus het resultaat is gelijk aan het product van a en b .

Bij voorbeeld 11 geldt $a = n$ en $b = n + 1$. Uit opgave 40 volgt dat $\text{ggd}(n, n + 1) = 1$. Dus $\text{kgv}(n, n + 1) = n \cdot (n + 1) = n^2 + n$. \square

Opgave 59. *Definieer een rij natuurlijke getallen a_1, a_2, a_3, \dots als volgt: $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = a_n + 2n$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$. Bewijs dat $\text{ggd}(a_n, a_{n+1}) = 1$ voor alle natuurlijke getallen n .*

Uitwerking. Als je een aantal getallen in de rij uitreken, dan zie je wellicht dat steeds geldt dat $a_n = n^2 - n + 1$. Dit gaan we met inductie naar n bewijzen.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $a_n = 1$ en $n^2 - n + 1 = 1$, dus dat klopt.

(Inductiestap) Stel nu dat voor zekere $n = k \geq 1$ geldt $a_k = k^2 - k + 1$. Dan kunnen we a_{k+1} berekenen:

$$a_{k+1} = a_k + 2k = (k^2 - k + 1) + 2k = k^2 + k + 1 = (k^2 + 2k + 1) - k = (k + 1)^2 - (k + 1) + 1.$$

Dit is precies onze bewering voor $n = k + 1$. Met inductie hebben we nu aangetoond dat $a_n = n^2 - n + 1$ voor alle natuurlijke getallen n .

Nu gebruiken we rekenregel 5 om $\text{ggd}(a_n, a_{n+1})$ te bepalen:

$$\text{ggd}(a_n, a_{n+1}) = \text{ggd}(a_n, a_n + 2n) = \text{ggd}(a_n, (a_n + 2n) - a_n) = \text{ggd}(a_n, 2n).$$

Bedenk nu dat a_n altijd oneven is: er geldt $a_n = n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$ en precies één van n en $n - 1$ is even. Dus er geldt (zie opgave 56) dat $\text{ggd}(a_n, 2n) = \text{ggd}(a_n, n)$. Daar

passen we nu opgave 54 op toe (met $k = -(n - 1)$):

$$\text{ggd}(a_n, n) = \text{ggd}(n^2 - n + 1, n) = \text{ggd}((n^2 - n + 1) - (n - 1)n, n) = \text{ggd}(1, n) = 1.$$

Dit voltooit het bewijs. \square

Opgave 60. *Laat a, b en c gehele getallen zijn. Bewijs dat de grootste gemeenschappelijke deler van $2a + 1, 2b + 1$ en $2c + 1$ gelijk is aan de grootste gemeenschappelijke deler van $a + b + 1, b + c + 1$ en $c + a + 1$.*

Uitwerking. Zij d een gemeenschappelijke deler van $2a + 1, 2b + 1$ en $2c + 1$. Dan is d ook een deler van $(2a + 1) + (2b + 1) = 2(a + b + 1)$ (rekenregel 4). Omdat d oneven is, is d ook een deler van $a + b + 1$. Net zo is d een deler van $b + c + 1$ en $c + a + 1$. Dus d is ook een gemeenschappelijke deler van $a + b + 1, b + c + 1$ en $c + a + 1$.

Zij nu juist d een gemeenschappelijke deler van $a + b + 1, b + c + 1$ en $c + a + 1$. Dan is d ook een deler van $(b + c + 1) + (c + a + 1) - (a + b + 1) = 2c + 1$ (rekenregel 4). Net zo is d een deler van $2a + 1$ en $2b + 1$. Iedere gemeenschappelijke deler van $a + b + 1, b + c + 1$ en $c + a + 1$ is dus ook een gemeenschappelijke deler van $2a + 1, 2b + 1$ en $2c + 1$.

Kortom, de gemeenschappelijke delers van $2a + 1, 2b + 1$ en $2c + 1$ zijn precies de gemeenschappelijke delers van $a + b + 1, b + c + 1$ en $c + a + 1$. In het bijzonder zijn de *grootste* gemeenschappelijke delers van deze twee drietallen getallen gelijk aan elkaar. \square

Opgave 61 (Finale 1982). *Definieer $n = 9^{753}$. Bepaal $\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1)$.*

Uitwerking. We passen opgave 54 toe met $k = -n$. Er geldt

$$\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1) = \text{ggd}(n^2 + 2, (n^3 + 1) - n(n^2 + 2)) = \text{ggd}(n^2 + 2, 1 - 2n).$$

Omdat $1 - 2n$ oneven is, geldt volgens opgave 56 dat $\text{ggd}(n^2 + 2, 1 - 2n) = \text{ggd}(2n^2 + 4, 1 - 2n)$. Nu passen we twee keer opgave 54 toe, de eerste keer met $k = n$ en de tweede keer met $k = 2$:

$$\begin{aligned} \text{ggd}(2n^2 + 4, 1 - 2n) &= \text{ggd}(2n^2 + 4 + n(1 - 2n), 1 - 2n) \\ &= \text{ggd}(n + 4, 1 - 2n) \\ &= \text{ggd}(n + 4, (1 - 2n) + 2(n + 4)) \\ &= \text{ggd}(n + 4, 9). \end{aligned}$$

Omdat 3 een deler is van $n = 9^{753}$, maar niet van 4, geldt volgens rekenregel 4 dat 3 geen deler is van $n + 4$. Aangezien de enige delers van 9 groter dan 1 ook deelbaar zijn door 3, volgt hieruit $\text{ggd}(n + 4, 9) = 1$. Conclusie: $\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1) = 1$. \square

Opgave 62 (Finale 1998). *Van twee positieve gehele getallen m en n is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud gelijk aan $133866 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 67$. Het verschil $m - n$ is gelijk aan 189. Bereken m en n .*

Uitwerking. Omdat het kgv van m en n precies drie factoren 3 bevat, hebben m en n elk hooguit drie factoren 3 en één van beide moet wel precies drie factoren 3 hebben. Maar omdat $m = n + 189 = n + 3^3 \cdot 7$ heeft de ander dan ook drie factoren 3 (rekenregel 4). We concluderen dat we m en n kunnen schrijven als $m = 27k$ en $n = 27l$. Hierbij geldt $k = l + 7$ en $\text{kgv}(k, l) = 2 \cdot 37 \cdot 67 = 67 \cdot 74 = 4958$. Elk van de priemfactoren (2, 37 en 67) moet in k of l voorkomen. Als zo'n priemfactor in allebei zou voorkomen, dan zou hij ook in $k - l = 7$ voorkomen (rekenregel 4) maar dat kan niet. Dus elke priemfactor komt maar in één van beide voor. Dit geef acht mogelijkheden voor l . We zouden ze even alle acht kunnen langs gaan. Maar we kunnen ook verder rekenen. Voor k vinden we nu twee uitdrukkingen: enerzijds $k = \frac{4958}{l}$ (k krijgt de overgebleven priemfactoren) en anderzijds ook $k = l + 7$. Dus $\frac{4958}{l} = l + 7$, dus $l^2 + 7l - 4958 = 0$. Dat is gewoon een vierkantsvergelijking, dus $l = \frac{-7 \pm \sqrt{19881}}{2} = 67$ (of -74 maar die vervalft). Dan is $k = 67 + 7 = 74$. We concluderen dat $m = 27 \cdot 74 = 1998$ en dat $n = 27 \cdot 67 = 1809$. \square

8 Gemengde opgaven

Opgave 63 (Finale 2022). *Een positief geheel getal n heet deelpriemig als voor elke positieve deler d van n geldt dat minstens één van de getallen $d - 1$ en $d + 1$ een priemgetal is. Zo is 8 bijvoorbeeld wel deelpriemig, want zijn positieve delers 1, 2, 4 en 8 verschillen elk 1 van een priemgetal (namelijk respectievelijk 2, 3, 5 en 7), terwijl 9 niet deelpriemig is, want zijn deler 9 verschilt niet 1 van een priemgetal (8 en 10 zijn beide samengesteld). Bepaal het grootste deelpriemige getal.*

Uitwerking. Stel dat n een deelpriemig getal is. Dan kan n geen oneven deler $d \geq 5$ hebben. Immers, voor zo'n deler zijn zowel $d - 1$ als $d + 1$ even getallen. Omdat $d - 1 > 2$, zijn dat beide samengestelde getallen en dat zou in tegenspraak zijn met het feit dat n deelpriemig is. De oneven delers 1 en 3 kunnen wel voorkomen, want het getal 3 is zelf deelpriemig.

Vanwege de unieke ontbinding in priemfactoren, kan het getal n nu alleen maar factoren 2 hebben en hooguit één factor 3. Het getal $2^6 = 64$ en alle veelvouden daarvan zijn niet deelpriemig, omdat zowel $63 = 7 \cdot 9$ als $65 = 5 \cdot 13$ geen priemgetal is. Een deelpriemig getal heeft dus hooguit vijf factoren 2. Het grootste getal dat mogelijk deelpriemig zou kunnen zijn, is dus $3 \cdot 2^5 = 96$.

We gaan na dat 96 inderdaad een deelpriemig getal is: de delers van 96 zijn 1, 2, 3, 4, 6,

8, 12, 16, 24, 32, 48 en 96, en de buurgetallen 2, 3, 2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 31, 47 en 97 zijn priem. Het grootste deelpriemige getal is dus 96. \square

Opgave 64 (Finale 2011). *Bepaal alle drietallen positieve gehele getallen (a, b, n) waarvoor geldt dat $a! + b! = 2^n$. (Hierbij staat $k!$ voor $1 \times 2 \times \dots \times k$, dus bijvoorbeeld $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.)*

Uitwerking. We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $a \leq b$.

Als $a \geq 3$ is ook $b \geq 3$. Dan is zowel $a!$ als $b!$ deelbaar door 3. Volgens rekenregel 4 is dan ook $2^n = a! + b!$ deelbaar door 3. Dat kan natuurlijk niet, want 2^n bevat alleen maar priemfactoren 2.

Als $a = 2$ en $b \geq 4$ is $b!$ deelbaar door 4 maar $a! = 2$ niet. Volgens rekenregel 4 is dan ook 2^n niet deelbaar door 4, dus $n = 1$. Er staat nu $2 + b! = 2$, maar dat is voor geen enkel positief geheel getal b waar. Als $a = 2$ moet er dus gelden dat $b = 1$, $b = 2$ of $b = 3$. We proberen deze waarden allemaal uit: voor $b = 1$ krijgen we $2^n = 3$ (geen oplossing), voor $b = 2$ krijgen we $2^n = 4$ (met als oplossing $n = 2$) en voor $b = 3$ krijgen we $2^n = 8$ (met als oplossing $n = 3$). Voor $a = 2$ vinden we dus de drietallen $(a, b, n) = (2, 2, 2)$ en $(a, b, n) = (2, 3, 3)$.

Als $a = 1$ en $b \geq 2$ is $a! + b!$ oneven en dat kan niet. Als $a = 1$ moet dus ook gelden dat $b = 1$, en daarmee vinden we nog de oplossing $(a, b, n) = (1, 1, 1)$.

Op ons lijstje met alle oplossingen moeten ook de oplossingen met $a > b$ komen te staan. Al met al vinden we vier oplossingen (a, b, n) : $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(1, 1, 1)$ en $(3, 2, 3)$. \square

Opgave 65 (Finale 2012). *Bepaal alle paren (p, m) bestaande uit een priemgetal p en een positief geheel getal m waarvoor geldt dat*

$$p^3 + m(p + 2) = m^2 + p + 1.$$

Uitwerking. We herschrijven de vergelijking als

$$p^3 - p - 1 = m^2 - m(p + 2) = m(m - p - 2).$$

Er geldt $p^3 - p = p(p^2 - 1) = p(p + 1)(p - 1)$. Van drie opeenvolgende gehele getallen is er altijd minstens eentje even, dus $p^3 - p$ is even en $p^3 - p - 1$ is juist oneven. De linkerkant van deze vergelijking bevat dus geen priemfactoren 2. Dan kan de rechterkant er ook geen bevatten, dus zowel m als $m - p - 2$ moet oneven zijn. Dit betekent dat $m - (m - p - 2) = p + 2$ juist even is, dus p is even. Omdat p een priemgetal is, kunnen we hieruit concluderen dat $p = 2$. Als we dit invullen in de oorspronkelijke vergelijking, vinden we $8 + 4m = m^2 + 3$ oftewel $(m + 1)(m - 5) = 0$. Omdat m positief is, concluderen we dat $m = 5$. We hebben nu laten zien dat als (p, m) een oplossing is, dat er dan moet

gelden dat $p = 2$ en $m = 5$. Voor $p = 2$ en $m = 5$ zijn beide kanten van de oorspronkelijke vergelijking gelijk aan 28, dus dit is ook echt een oplossing. Er is dus één paar dat voldoet, namelijk $(p, m) = (2, 5)$. \square

Opgave 66 (Finale 2012). *Gegeven zijn vier verschillende gehele getallen a, b, c en d . Bewijs dat*

$$(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

deelbaar is door 12.

Uitwerking. Het is genoeg om te bewijzen dat $n = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$ deelbaar is door 3 en 4, want dan moet het ook deelbaar zijn door het kleinste gemene veelvoud 12 van 3 en 4.

We bewijzen eerst dat n deelbaar is door 4. Als er van a, b, c en d drie even of juist drie oneven zijn, dan zijn de verschillen tussen deze getallen allemaal deelbaar door 2. In dat geval is n dus zelfs deelbaar door $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Zo niet, dan zijn er van a, b, c en d twee even en twee oneven. De twee onderlinge verschillen zijn even, zodat n deelbaar is door 4.

We bewijzen nu dat n deelbaar is door 3. Hiervoor berekenen we van a, b, c en d de rest bij deling door 3. Omdat er 3 mogelijke resten zijn, geven twee van deze getallen dezelfde rest bij deling door 3. Hun verschil is deelbaar door 3, en daarmee is n ook deelbaar door 3. \square

Opgave 67 (Finale 1997). *Bij elk positief geheel getal n definiëren we $f(n)$ als het product van de som van de cijfers van n met n zelf. Voorbeelden: $f(19) = (1 + 9) \cdot 19 = 190$ en $f(97) = (9 + 7) \cdot 97 = 1552$.*

Toon aan dat er geen getal n bestaat met $f(n) = 19091997$.

Uitwerking. Omdat de som van de cijfers van 19091997 deelbaar is door 9, is het getal zelf deelbaar door 9. We vinden $19091997 = 2121333 \cdot 9$. De som van de cijfers van 2121333 is deelbaar door 3, dus het getal zelf is deelbaar door 3. We vinden $19091997 = 707111 \cdot 3^3$. Stel nu dat er een n is zodat $f(n) = 19091997$. Dan is n zelf of de som van de cijfers van n deelbaar door 9, anders kan het product geen drie factoren 3 bevatten. Maar als n deelbaar is door 9, dan is de som van zijn cijfers dat ook. En andersom: als de som van de cijfers van n deelbaar is door 9, dan is n deelbaar door 9. Dus $f(n)$ moet minstens vier factoren 3 bevatten. Maar de som van de cijfers van 707111 is niet deelbaar door 3, dus 19091997 bevat maar drie factoren 3. Tegenspraak. Er bestaat dus niet zo'n n . \square

Opgave 68 (Finale 2017). *Als we het getal 13 delen door de drie getallen 5, 7 en 9, dan leveren die delingen resten op: bij deling door 5 krijgen we rest 3, bij deling door 7 rest 6 en bij deling door 9 rest 4. Als we deze resten bij elkaar optellen, krijgen we $3 + 6 + 4 = 13$, het oorspronkelijke getal.*

- (a) Laat n een positief geheel getal zijn en laat a en b positieve gehele getallen kleiner dan n zijn. Bewijs: als je n deelt door a en b , dan zijn de twee resten bij elkaar opgeteld nooit gelijk aan n .
- (b) Bepaal alle gehele getallen $n > 229$ met de eigenschap dat als je n deelt door 99, 132 en 229, de drie resten bij elkaar opgeteld gelijk zijn aan n .

Uitwerking.

- (a) Laat r de rest zijn bij deling van n door a . We bewijzen eerst dat $r < \frac{n}{2}$. Als $2a \leq n$, dan volgt dit uit het feit dat $r < a$. Als $2a > n$, dan geldt $r = n - a$ (aangezien we al wisten dat $a < n$), zodat $r = n - a < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

Op dezelfde manier is de rest bij deling van n door b ook kleiner dan $\frac{n}{2}$.

Als we n door a en b delen, dan zijn de twee resten elk kleiner dan $\frac{n}{2}$, dus zijn de resten samen kleiner dan n .

- (b) Laat r , s en t de resten zijn bij deling van n door 99, 132 en 229. Het getal $n - t$ is een veelvoud van 229 en ongelijk aan 0 omdat $n > 229 > t$. Er is gegeven dat $r + s + t = n$, oftewel dat $n - t = r + s$. We concluderen dat $r + s$ een positief veelvoud moet zijn van 229. Omdat $99 + 132 < 2 \cdot 229$ geldt zeker dat $r + s < 2 \cdot 229$, dus $r + s = 229$.

Aangezien $r \leq 98$ en $s \leq 131$ volgt uit $r + s = 229$ dat $r = 98$ en $s = 131$. Het getal $n + 1$ is dus deelbaar door zowel 99 als 132 en daarmee deelbaar door het kleinste gemene veelvoud $\text{kgv}(99, 132) = \text{kgv}(9 \cdot 11, 3 \cdot 4 \cdot 11) = 4 \cdot 9 \cdot 11 = 396$. Aangezien $n = 229 + t$ en $t < 229$ geldt bovendien dat $n + 1 \leq 458$. De enige mogelijkheid is dus $n + 1 = 396$, oftewel $n = 395$.

Voor $n = 395$ zijn de drie resten gelijk aan $r = 98$, $s = 131$ en $t = 166$, zodat inderdaad geldt $n = r + s + t$.

□

Opgave 69 (Finale 2013). Voor een positief geheel getal n geven we met $P(n)$ het product van de positieve delers van n aan. Zo is bijvoorbeeld $P(20) = 8000$. De positieve delers van 20 zijn namelijk 1, 2, 4, 5, 10 en 20, met als product $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = 8000$.

- (a) Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n$.
- (b) Laat zien dat er geen positieve gehele getallen n bestaan waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

Uitwerking.

- a) Omdat $P(n) = 15n$ het product van de positieve delers van n is, moeten de priemdelers 3 en 5 van $P(n)$ ook delers zijn van n . Er volgt dat n een veelvoud is van

15. Als $n > 15$, dan zijn 3, 5, 15 en n verschillende delers van n , zodat geldt $P(n) \geq 3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot n = 225n$. Dat is in tegenspraak met het gegeven dat $P(n) = 15n$. De enige overgebleven mogelijkheid is dus $n = 15$. Dit is ook inderdaad een oplossing, want $P(15) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 15 \cdot 15$.

b) Stel dat $P(n) = 15n^2$ geldt. Dan moet n wederom een 15-voud zijn. Duidelijk is, dat $n = 15$ niet voldoet, zodat $n \geq 30$. We zien dat $\frac{n}{5} > 5$, zodat $1 < 3 < 5 < \frac{n}{5} < \frac{n}{3} < n$ zes verschillende delers zijn van n . Dus $P(n) \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{n}{5} \cdot \frac{n}{3} \cdot n = n^3$. Omdat $n > 15$ geldt $P(n) \geq n \cdot n^2 > 15n^2$, een tegenspraak. Er bestaat dus geen n met $P(n) = 15n^2$.

□

Opgave 70 (Finale 2006). *Er geldt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6 + 7 + 8$. Wat is het kleinste getal k groter dan 6 waarvoor geldt*

$1 + 2 + \dots + k = k + (k + 1) + \dots + n$, met n een geheel getal groter dan k ?

Uitwerking. De linkerkant is gelijk aan $\frac{1}{2}k(k+1)$, de rechterkant aan $\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}k(k-1)$. Dus $n(n+1) = k(k+1) + k(k-1) = 2k^2$. In de priemontbinding van k^2 komt elke priemfactor een even aantal keer voor. Geen enkele priemfactor kan voorkomen in zowel n als $n+1$ (zie opgave 40), dus in de priemfactorisaties van n en $n+1$ komen alle priemgetallen groter dan 2 ook een even aantal keer voor. De priemfactor 2 komt in precies één van beide een oneven aantal keer voor (en in de andere helemaal niet). Dus de getallen n en $n+1$ zijn een kwadraat en twee keer een kwadraat. We moeten dus op zoek naar een kwadraat en twee keer een kwadraat die precies één verschillen.

De getallen 8 en 9 voldoen hieraan en corresponderen met het gegeven voorbeeld ($n = 8$, $k = 6$). Door de kwadraten af te lopen en na te gaan of dit getal plus 1 of min 1 twee keer een kwadraat is, vinden we het volgende voorbeeld: 49 en 50. We krijgen $n = 49$ en $k = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35$. □

Opgave 71 (Finale 2004). *Een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c heeft de volgende eigenschappen: $a = p^m$ en $b = q^n$ met p en q priemgetallen en m en n positieve gehele getallen, $c = 2k + 1$ met k een positief geheel getal. Bepaal alle mogelijke waarden van c en de daarbij horende waarden van a en b .*

Uitwerking. Volgens de stelling van Pythagoras moet gelden $a^2 + b^2 = c^2$, dus $p^{2m} + q^{2n} = (2k+1)^2$. De rechterkant is oneven, dus precies één van p en q is even en de ander is oneven. Zeg dat p even is en q oneven. Omdat p priem is, moet gelden $p = 2$. We herschrijven de vergelijking als

$$q^{2n} = (2k + 1)^2 - 2^{2m} = (2k + 1 + 2^m)(2k + 1 - 2^m).$$

Als q een deler is van beide factoren rechts, dan is q ook een deler van het verschil (rekenregel 4) en dat is gelijk aan $2 \cdot 2^m$. Maar dat is een tweemacht en die heeft geen oneven priemdelers. Dus q is een deler van slechts één van de twee factoren. Omdat links geen andere priemfactoren dan q voorkomen, moet de andere factor rechts gelijk zijn aan 1. Dat moet wel de kleinste factor zijn. Dus $2k + 1 - 2^m = 1$, oftewel $2k = 2^m$. Verder geldt $2k + 1 + 2^m = q^{2n}$ en dat kunnen we nu herschrijven als $2^{m+1} + 1 = q^{2n}$. Daaruit volgt

$$2^{m+1} = q^{2n} - 1 = (q^n - 1)(q^n + 1),$$

dus zowel $q^n - 1$ als $q^n + 1$ zijn een tweemacht. Er bestaat maar één tweetal tweemachten die precies 2 verschillen, namelijk 2 en 4. Dus $q^n - 1 = 2$ en $q^n + 1 = 4$. Dat geeft $q^n = 3$, dus $n = 1$ en $q = 3$. Nu is $2^{m+1} = 3^2 - 1 = 8$, dus $m = 2$. We vinden $a = 4$, $b = 3$ en $c = 5$. Dat zijn inderdaad de zijden van een rechthoekige driehoek. Er is dus precies één oplossing: $c = 5$ met $a = 4$ en $b = 3$ (of andersom). \square

Opgave 72 (Finale 2020). *Bepaal alle tweetallen gehele getallen (x, y) waarvoor $2xy$ een kwadraat is en $x^2 + y^2$ een priemgetal is.*

Uitwerking. We hebben $2xy = a^2$ met a een niet-negatief geheel getal en $x^2 + y^2 = p$ met p een priemgetal.

Omdat een priemgetal geen kwadraat kan zijn, volgt dat $x, y \neq 0$. Omdat $2xy$ een kwadraat is, volgt dat x en y allebei positief zijn, of allebei negatief. Als (x, y) een oplossing is, dan is $(-x, -y)$ ook een oplossing, dus we mogen in het vervolg aannemen dat x en y positief zijn en aan het eind voor elke gevonden oplossing (x, y) de oplossing $(-x, -y)$ toevoegen.

Combineren van $2xy = a^2$ en $x^2 + y^2 = p$ geeft $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = p + a^2$. Door a^2 naar de andere kant te brengen vinden we

$$p = (x + y)^2 - a^2 = (x + y + a)(x + y - a).$$

Omdat $x + y + a$ positief is, moet $x + y - a$ nu ook wel positief zijn. Het priemgetal p kan maar op twee manieren als product van twee positieve gehele getallen geschreven worden: $1 \cdot p$ en $p \cdot 1$. Aangezien $x + y + a \geq x + y - a$, volgt dat $x + y + a = p$ en $x + y - a = 1$.

Tellen we deze twee vergelijkingen op, dan vinden we dat $2x + 2y = p + 1$. We weten ook dat $x^2 + y^2 + 1 = p + 1$, dus geldt $2x + 2y = x^2 + y^2 + 1$. Door alle termen naar de rechterkant te brengen en aan beide kanten 1 op te tellen vinden we

$$1 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

We hebben nu twee gehele kwadraten die bij elkaar opgeteld 1 zijn. Dat kan alleen als een van die twee kwadraten 0 is en het andere kwadraat 1 is, dus $(x - 1)^2 = 0$ en $(y - 1)^2 = 1$, of $(x - 1)^2 = 1$ en $(y - 1)^2 = 0$. Omdat x en y positief zijn vinden we twee mogelijke

oplossingen: $x = 1$ en $y = 2$, of $x = 2$ en $y = 1$. In beide gevallen geldt dat $2xy = 4$ een kwadraat is en dat $x^2 + y^2 = 5$ een priemgetal is. Beide mogelijkheden zijn dus inderdaad oplossingen.

Toevoegen van de oplossingen waarbij x en y negatief zijn geeft in totaal dus vier oplossingen (x, y) , namelijk

$$(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1).$$

□

Katern 3

Meetkunde

De vlakke meetkunde is de meetkunde die zich afspeelt in het platte vlak. De hoofdrolspelers van de vlakke meetkunde zijn de punten en de lijnen van driehoeken, vierhoeken en andere veelhoeken. Ook cirkels komen geregeld in een meetkunde-opgave voor. In dit katern bekijken we eerst enkele technieken om te laten zien dat bepaalde hoeken even groot of bepaalde lijnstukken even lang zijn. Daarna bestuderen we een aantal speciale driehoeken en vierhoeken die allerlei handige eigenschappen hebben.

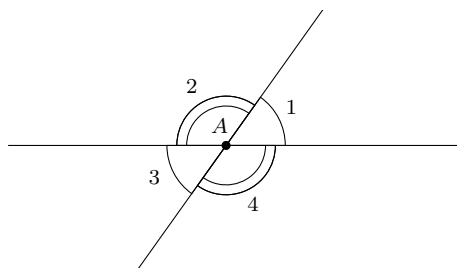
Net als bij de onderwerpen die je in de andere katernen bent tegengekomen, kun je bij meetkundige bewijzen verschillende richtingen in slaan. De eerste stap is echter altijd hetzelfde: het maken van een net plaatje. Hoe groter en netter je plaatje is, hoe beter het je zal helpen bij het oplossen van de opgave. In de opgave zijn meestal al een aantal eigenschappen van dit plaatje gegeven. De stellingen en technieken die we in dit hoofdstuk behandelen, kun je gebruiken om op basis daarvan weer nieuwe eigenschappen van het plaatje te vinden. Er blijken dan bijvoorbeeld plotseling twee hoeken gelijk te zijn of twee lijnstukken even lang. Door steeds meer nieuwe eigenschappen te vinden en de gevonden eigenschappen weer handig met elkaar te combineren, kun je uiteindelijk het gevraagde bewijzen.

9 Hoeken

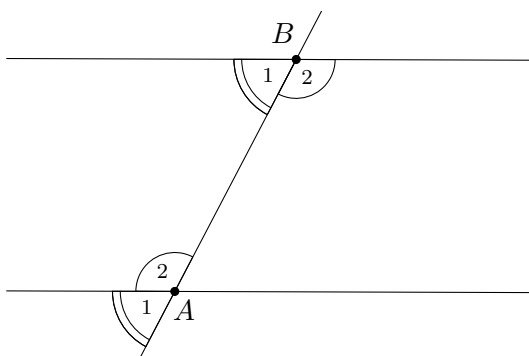
Als twee lijnen elkaar snijden, dan maken ze in het snijpunt een *hoek* met elkaar. We meten hoeken in graden en noteren de hoek bij punt A als $\angle A$. Soms is het niet duidelijk welke hoek we precies bedoelen; dan kunnen we een getal (een zogenaamde *index*) toevoegen aan de naam van de hoek. Zo zie je in figuur 1 de hoeken $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$ en $\angle A_4$. Deze vier hoeken zijn samen precies 360° , een heel rondje rond. We noemen dat ook wel een *volledige hoek*. De helft hiervan is 180° en dat noemen we een *gestrekte hoek*. In de figuur

vormen $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen een gestrekte hoek. Een *rechte hoek* is ten slotte een hoek van precies 90° .

We kunnen een hoek ook met drie letters noteren: $\angle BAC$ is de hoek die je krijgt als je van punt B naar punt A loopt en daarna van punt A naar punt C . Het gaat dan om de hoek bij punt A . Deze notatie is vooral handig als er meer dan twee lijnen door punt A gaan: dan is het niet meer duidelijk welke hoek je bedoelt met $\angle A$. De notatie $\angle BAC$ geeft dan aan dat het gaat om de hoek bij A tussen de lijnen AB en AC . In figuur 3 bijvoorbeeld wordt met hoek $\angle BAC$ dus hoek $\angle A_2$ bedoeld.



Figuur 1. Volledige, gestrekte, overstaande hoeken.



Figuur 2. *F*-hoeken en *Z*-hoeken.

9.1 Overstaande hoeken

We hadden gezien dat in figuur 1 de hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen een gestrekte hoek vormen. Oftewel: $\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ$. Hetzelfde geldt natuurlijk voor $\angle A_2$ en $\angle A_3$: de som daarvan is ook 180° . Dus

$$\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2 = \angle A_3.$$

De hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_3$ zijn dus even groot. In het algemeen zeggen we dat bij twee snijdende lijnen de *overstaande hoeken* gelijk zijn. Net zo goed zijn dus $\angle A_2$ en $\angle A_4$ even groot, want dat zijn ook overstaande hoeken.

9.2 F- en Z-hoeken

In figuur 2 zie je twee evenwijdige lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt, de ene lijn in A en de andere lijn in B . In zo'n plaatje zijn de hoeken $\angle A_1$ en $\angle B_1$ aan elkaar gelijk. We noemen zulke hoeken bij evenwijdige lijnen ook wel F-hoeken. Er zijn ook Z-hoeken: in de figuur zijn dat $\angle A_2$ en $\angle B_2$. Die hoeken zijn ook even groot. Wanneer een plaatje evenwijdige lijnen bevat, levert dat dus altijd allerlei gelijke hoeken op.

Je kunt de gelijkheid van twee hoeken ook gebruiken om juist te bewijzen dat twee lijnen evenwijdig zijn. Stel je dat een plaatje hebt zoals in figuur 2, maar je weet nog niet dat de twee lijnen evenwijdig zijn. Als je dan kunt bewijzen dat de F-hoeken $\angle A_1$ en $\angle B_1$ gelijk zijn of juist de Z-hoeken $\angle A_2$ en $\angle B_2$, dan volgt daaruit dat de lijnen evenwijdig zijn.

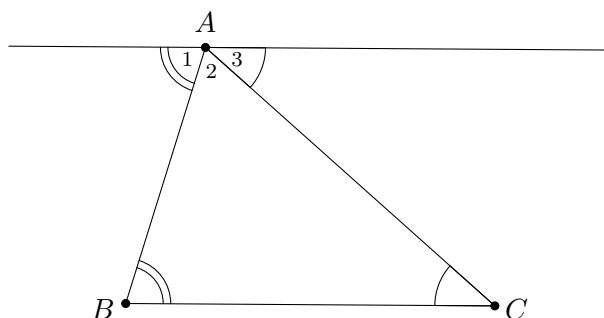
Als de lijnen k en ℓ evenwijdig zijn, dan noteren we dat trouwens met $k \parallel \ell$.

9.3 Hoekensom

Verder is er nog een heel belangrijk resultaat over hoeken in een driehoek.

Stelling 9.3.1 (Hoekensom in een driehoek). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt dat $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.*

Bewijs. Trek een lijn evenwijdig aan BC door A , zoals in figuur 3. Dan geldt $\angle B = \angle A_1$ en $\angle C = \angle A_3$ wegens Z-hoeken. Bovendien vormen $\angle A_1$, $\angle A_2$ en $\angle A_3$ samen een gestrekte hoek. Dus $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_2 + \angle A_1 + \angle A_3 = 180^\circ$. \square



Figuur 3. *Ondersteuning bij het bewijs van stelling 9.3.1.*

9.4 Opgaven

Opgave 73. Laat $\triangle ABC$ gegeven zijn. De lijn door C evenwijdig met AB en de lijn door B evenwijdig met AC snijden elkaar in punt P . Bewijs dat $\angle BAC = \angle CPB$.

Uitwerking. Definieer een punt X op AC , zodat C tussen A en X ligt. Vanwege F-hoeken geldt $\angle BAC = \angle PCX$. Vanwege Z-hoeken geldt $\angle PCX = \angle CPB$. Dus $\angle BAC = \angle CPB$. \square

Opgave 74 (Buitenhoekstelling). Laat driehoek $\triangle ABC$ gegeven zijn. Punt X ligt op AB zodat B tussen A en X ligt. Bewijs dat $\angle CBX = \angle BAC + \angle ACB$. (We noemen $\angle CBX$ ook wel de buitenhoek van $\triangle ABC$ bij $\angle B$.)

Uitwerking. Omdat $\angle CBX + \angle ABC$ een gestrekte hoek is, geldt $\angle CBX = 180^\circ - \angle ABC$. Vanwege de hoekensom in driehoek $\triangle ABC$ is bovendien $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$. Dus $\angle CBX = \angle BAC + \angle ACB$. \square

Opgave 75 (U-hoeken). Laat A, B, X en Y vier punten zijn zodat X en Y aan dezelfde kant van lijn AB liggen.

(a) Stel dat $AX \parallel BY$. Bewijs dat $\angle XAB + \angle YBA = 180^\circ$.

(b) Stel dat $\angle XAB + \angle YBA = 180^\circ$. Bewijs dat $AX \parallel BY$.

Uitwerking. Laat Z een punt op AX zijn aan de andere kant van AB dan X . Dan vormen $\angle XAB$ en $\angle BAZ$ samen een gestrekte hoek, dus $\angle XAB + \angle BAZ = 180^\circ$. Nu geldt wegens Z-hoeken dat AX evenwijdig is aan BY precies dan als $\angle BAZ = \angle YBA$, dus precies dan als $\angle XAB + \angle YBA = 180^\circ$. \square

Opgave 76. In een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ is D het punt op BC zodat $\angle ADB = 90^\circ$ en F het punt op AB zodat $\angle CFA = 90^\circ$. Zij S het snijpunt van AD en CF . Bewijs dat

(a) $\angle BAD = \angle FCB$;

(b) $\angle ABC = \angle FSA$.

(Een driehoek heet scherphoekig als alle drie de hoeken scherp zijn, d.w.z. kleiner dan 90°).

Uitwerking. Volgens de hoekensom in driehoek $\triangle ADB$ geldt $\angle BAD + \angle DBA + 90^\circ = 180^\circ$. Dus $\angle BAD + \angle DBA = 90^\circ$. Volgens de hoekensom in driehoek $\triangle CFB$ geldt

op dezelfde manier $\angle FCB + \angle CBF = 90^\circ$. Omdat $\angle CBF$ en $\angle DBA$ dezelfde hoeken zijn, volgt hieruit $\angle BAD = 90^\circ - \angle DBA = 90^\circ - \angle CBF = \angle FCB$ (a). Op dezelfde manier als bij (a) volgt uit de hoekensom in driehoeken $\triangle ADB$ en $\triangle AFS$ dat $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ - \angle BAD = 90^\circ - \angle FAS = \angle FSA$ (b). \square

Opgave 77. Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met D een punt op zijde AC (tussen A en C in) en E een punt op zijde BC (tussen B en C in). Laat F het punt binnen de driehoek zijn zodat AF de hoek $\angle DAE$ precies doormidden deelt (d.w.z. $\angle EAF = \angle DAF$; we noemen de lijn AF ook wel de bissectrice van $\angle DAE$) en BF de hoek $\angle DBE$ precies doormidden deelt (d.w.z. $\angle EBF = \angle DBF$). Bewijs dat $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$.

Uitwerking. De som van de hoeken van driehoek $\triangle ABD$ is 180 graden, dus

$$\angle ABD + \angle ADB + \angle DAB = 180^\circ.$$

We kunnen hoek $\angle DAB$ splitsen in drie stukken: $\angle BAE$, $\angle EAF$ en $\angle DAF$. Dus geldt

$$\angle ABD + \angle ADB + \angle BAE + \angle EAF + \angle DAF = 180^\circ.$$

We doen nu hetzelfde met driehoek $\triangle ABE$; hierbij splitsen we juist hoek $\angle ABE$:

$$\angle BAE + \angle AEB + \angle ABD + \angle DBF + \angle EBF = 180^\circ.$$

Ook in driehoek $\triangle ABF$ zijn de hoeken samen 180 graden. Nu splitsen we de hoeken $\angle BAF$ en $\angle ABF$ beide in twee stukken:

$$\angle AFB + \angle BAE + \angle EAF + \angle ABD + \angle DBF = 180^\circ.$$

De hoeken $\angle ABD$ en $\angle BAE$ komen steeds voor. We kunnen die dus wegstrepen en concluderen dat

$$\angle ADB + \angle EAF + \angle DAF = \angle AEB + \angle DBF + \angle EBF = \angle AFB + \angle EAF + \angle DBF.$$

Daaruit volgt

$$\angle ADB + \angle EAF + \angle DAF + \angle AEB + \angle DBF + \angle EBF = 2(\angle AFB + \angle EAF + \angle DBF).$$

Omdat $\angle DAF = \angle EAF$, kunnen we links $\angle EAF + \angle DAF$ wegstrepen tegen $2\angle EAF$ rechts. Omdat $\angle DBF = \angle EBF$, kunnen we links $\angle DBF + \angle EBF$ wegstrepen tegen $2\angle DBF$ rechts. We houden over

$$\angle ADB + \angle AEB = 2\angle AFB$$

en dat is wat we wilden bewijzen. \square

10 Congruentie en gelijkvormigheid

Laten we eens kijken naar de mogelijkheden om twee driehoeken met elkaar te vergelijken.

10.1 Congruentie

Bekijk een driehoek $\triangle ABC$. Als je deze driehoek oppakt en een stukje verschuift, draait en misschien een keertje spiegelt, dan krijg je een nieuwe driehoek $\triangle DEF$ die eigenlijk in heel veel opzichten hetzelfde is als $\triangle ABC$. De twee driehoeken hebben precies dezelfde vorm en grootte, alleen liggen ze op een andere plek in je tekening. In de wiskunde noemen we zulke driehoeken *congruent*.

Voor congruente driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F,$$

$$|AB| = |DE|, \quad |BC| = |EF| \quad \text{en} \quad |AC| = |DF|.$$

Met de notatie $|AB|$ geven we hier de lengte van het lijnstuk AB aan. Sommige van deze gelijkheden kun je uit de andere afleiden. Als je bijvoorbeeld weet dat $\angle A = \angle D$ en $\angle B = \angle E$, dan volgt daaruit dat $\angle C = \angle F$, omdat de som van de hoeken in beide driehoeken 180° is. Zo zijn twee driehoeken congruent als ze overeenkomstig hebben:

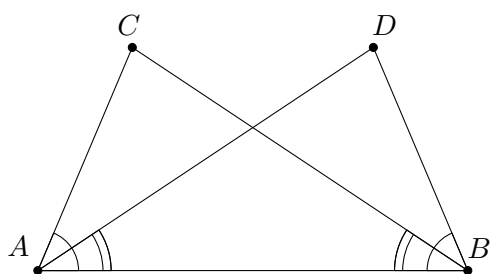
1. drie zijden (ZZZ),
2. twee zijden met de ingesloten hoek (ZHZ),
3. twee zijden en een rechte hoek (ZZR),
4. twee hoeken met de ingesloten zijde (HZH),
5. twee hoeken met een niet-ingesloten zijde (HHZ).

De drie letters achter de gevallen zijn korte “codes” om makkelijk aan te geven door welk geval een paar driehoeken congruent zijn. De *ingesloten hoek* bij het tweede geval betekent dat de hoek die je weet, precies tussen de twee zijdes die je weet ligt. Bijvoorbeeld: als $\angle A = \angle D$, $|AB| = |DE|$ en $|AC| = |DF|$, dan zijn driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ congruent wegens het geval ZHZ: $\angle A$ is de hoek die ingesloten is tussen de zijden AB en AC . Echter, als je in plaats van $\angle A = \angle D$ hebt dat $\angle B = \angle E$, dan wil dat nog niet zeggen dat de driehoeken congruent zijn (zie ook opgave 78). De hoek die je dan weet, is nu niet de ingesloten hoek tussen de twee zijden die je weet. Je zou dus in geval ZZH zitten, maar die staat niet in bovenstaand lijstje. Is de hoek $\angle B = \angle E$ echter recht, dan heb je toch congruente driehoeken, op grond van ZZR.

Als twee driehoeken congruent zijn, dan noteren we dat als $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Vaak zetten we er dan tussen haakjes de “code” van het congruentiegeval achter, bijvoorbeeld (ZHZ).

Let bij het opschrijven van een congruentie goed op de volgorde van de hoekpunten van de driehoeken! De volgorde moet zo zijn dat de hoeken bij de eerst genoemde hoekpunten, A en D , gelijk zijn; en zo ook voor het paar B en E en het paar C en F . Op die manier kun je meteen zien welke zijden er gelijk zijn: de zijden gevormd door de eerste twee letters links en rechts zijn gelijk, net als de zijden gevormd door de laatste twee letters en de zijden gevormd door de eerste en laatste letters.

Als je eenmaal weet dat vanwege een van de gevallen hierboven twee driehoeken congruent zijn, dan volgt daaruit dat de drie paren hoeken en de drie paren zijden allemaal gelijk zijn. Dat geeft je dus weer nieuwe informatie. Dit is een manier om te bewijzen dat twee hoeken of twee zijden gelijk zijn.



Figuur 4. *Figuur bij voorbeeld 12.*

Voorbeeld 12. *Bekijk een lijnstuk AB en twee punten C en D aan dezelfde kant van AB zodat $\angle CAB = \angle DBA$ en $\angle CBA = \angle DAB$ (zie figuur 4). Bewijs dat $|BC| = |AD|$.*

Oplossing. We hebben al twee paren gelijke hoeken. De hoeken $\angle CAB$ en $\angle CBA$ zitten in driehoek $\triangle ABC$, terwijl de hoeken $\angle DBA$ en $\angle DAB$ in driehoek $\triangle ABD$ zitten. We zien dat hoek $\angle A$ in driehoek $\triangle ABC$ gelijk is aan hoek $\angle B$ in driehoek $\triangle ABD$ en andersom. We gaan nu met congruentiegeval HZH (nummer 4 hierboven) bewijzen dat $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. De twee hoeken hebben we al. De ingesloten zijde is in de ene driehoek AB en in de andere BA . Deze zijn natuurlijk even lang. Dus wegens HZH geldt $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. Hieruit volgt $|BC| = |AD|$. \square

10.2 Gelijkvormigheid

Zoals we hierboven hebben gezien, hebben twee congruente driehoeken precies dezelfde vorm en grootte. De ene driehoek is als het ware een kopie van de ander, die op een andere plek in je tekening neergelegd is. Wat nou als we een driehoek zouden kopiëren en daarbij met een bepaalde factor zouden vergroten of verkleinen? De vorm van de driehoek

verandert dan niet, maar de grootte wel. Anders gezegd: de hoeken blijven gelijk en de verhoudingen tussen de lengtes van de zijden ook, maar de lengtes van de zijden zelf veranderen. Twee zulke driehoeken noemen we gelijkvormig. Als driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig zijn, noteren we dit met $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Let ook hier altijd weer goed op de volgorde. Voor gelijkvormige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

en

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Net als bij congruentie, heb je niet al deze gegevens nodig om te kunnen concluderen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Als je bijvoorbeeld weet dat $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ en ook nog dat de hoeken die door deze zijden worden ingesloten gelijk zijn (dus $\angle B = \angle E$) dan volgt daar al uit dat de twee driehoeken gelijkvormig zijn. Dat is het tweede geval van de gelijkvormigheidsgevallen hieronder:

1. de verhoudingen van de drie paren zijden (zzz),
2. de verhoudingen van twee paar zijden en de ingesloten hoek (zhz),
3. de verhouding van twee paar zijden en een rechte hoek (zzr),
4. twee hoeken (hh).

Net als bij congruentie gebruiken we “codes” van twee of drie letters om aan te geven uit welk geval de gelijkvormigheid volgt. Bij gelijkvormigheid schrijven we deze codes met kleine letters, terwijl we bij congruentie altijd hoofdletters gebruiken.

Bij de verhoudingen zoals we die hierboven hebben opgeschreven, deel je steeds de lengte van een zijde in de eerste driehoek door de lengte van de overeenkomstige zijde in de tweede driehoek. Als je dit voor alle drie de zijden doet, krijg je steeds dezelfde verhouding. Je kunt ook in plaats daarvan juist twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen. Als je de overeenkomstige zijden van de andere driehoek door elkaar deelt, komt er hetzelfde uit. Kortom, bij een gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ geldt niet alleen

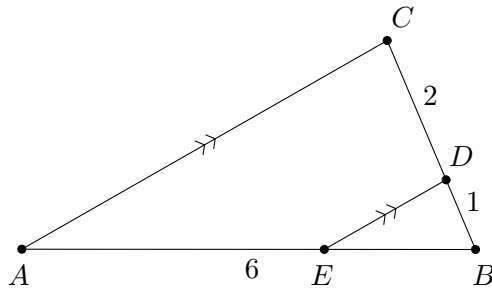
$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

maar ook

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}.$$

Dat dit eigenlijk gewoon hetzelfde is, kun je zien door kruislings te vermenigvuldigen. Zowel bij de eerste als bij de tweede gelijkheid krijg je dan $|AB| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE|$.

Voorbeeld 13. Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $|AB| = 6$ en $|BC| = 3$. Op zijde BC ligt een punt D met $|BD| = 1$ (zie figuur 5). Op zijde AB ligt een punt E zodat de lijnen ED en AC evenwijdig zijn. Hoe groot is $|AE|$?



Figuur 5. *Figuur bij voorbeeld 13.*

Oplossing. Vanwege F-hoeken geldt $\angle BCA = \angle BDE$ en $\angle CAB = \angle DEB$. Dus hebben we een gelijkvormigheid: $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ (hh). Nu kunnen we kiezen welke soort verhoudingen we gaan gebruiken. Laten we eerst eens twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen en dat ook bij de andere driehoek doen:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EB|}{|BD|}.$$

We weten $|AB| = 6$ en $|BC| = 3$, dus links staat 2. De breuk rechts moet dan ook wel gelijk zijn aan 2 en verder weten we dat $|BD| = 1$. Dus $|EB| = 2$. Daaruit volgt $|AE| = 6 - 2 = 4$. \square

10.3 Opgaven

Opgave 78. *Teken twee niet-congruente driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ zodat $\angle B = \angle E$, $|AB| = |DE|$ en $|AC| = |DF|$.*

Uitwerking. Begin met een driehoek $\triangle XYZ$ zodat $|XY| = |XZ|$. Teken nu een punt W op het verlengde van YZ zodat Y tussen W en Z ligt. Neem nu $\triangle ABC = \triangle XWY$ en $\triangle DEF = \triangle XWZ$. Dan geldt $\angle B = \angle W = \angle E$, $|AB| = |XW| = |DE|$ en $|AC| = |XY| = |XZ| = |DF|$ (zo hadden we $\triangle XYZ$ immers geconstrueerd). Driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ zijn echter niet congruent, want $|BC| = |WY| < |WZ| = |EF|$. \square

Opgave 79. *In een driehoek $\triangle ABC$ met $|AC| = |BC|$ is M het midden van zijde AB .*

- (a) *Bewijs dat $\triangle AMC \cong \triangle BMC$.*
- (b) *Bewijs dat $\angle ACM = \angle BCM$.*
- (c) *Bewijs dat $\angle AMC = 90^\circ$.*

Uitwerking.

- (a) Er geldt $|AC| = |BC|$, $|AM| = |BM|$ en $|CM| = |CM|$, dus met ZZZ volgt de gevraagde congruentie.
- (b) Dit volgt direct uit de congruentie van (a).
- (c) Uit de congruentie van (a) volgt dat $\angle AMC = \angle BMC$. Omdat deze hoeken samen een gestrekte hoek vormen, moeten ze allebei gelijk zijn aan 90° .

□

Opgave 80. Gegeven zijn twee lijnstukken AB en CD met snijpunt S zodat S het midden is van zowel AB als CD . Bewijs dat de lijnen AC en BD evenwijdig zijn.

Uitwerking. Vanwege overstaande hoeken geldt $\angle ASC = \angle BSD$. Verder is $|AS| = |BS|$ en $|CS| = |DS|$, dus $\triangle ASC \cong \triangle BSD$ (ZHZ). Dus $\angle SAC = \angle SBD$, waaruit met Z-hoeken volgt dat AC evenwijdig is aan BD . □

Opgave 81. Laat driehoek $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $\angle C < \angle A$. Laat D een punt op zijde BC zijn zodat $\angle BDA = \angle BAC$. Bewijs dat $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$.

Uitwerking. Er geldt uiteraard $\angle ABD = \angle B = \angle CBA$ en uit de gegevens volgt $\angle BDA = \angle BAC$. Dus we hebben een gelijkvormigheid van driehoeken: $\triangle BDA \sim \triangle BAC$ (hh). Daaruit volgt de gelijkheid van verhoudingen: $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|DB|}{|AB|}$. Kruislings vermenigvuldigen levert het gevraagde. □

Opgave 82. In driehoek $\triangle ABC$ ligt punt D op zijde AB tussen A en B en punt E op zijde AC tussen A en C zodat $|AD| = \frac{1}{2}|DB|$ en $|AE| = \frac{1}{2}|EC|$. Bewijs dat

- (a) BC evenwijdig is aan DE ;
- (b) $|DE| = \frac{1}{3}|BC|$.

Uitwerking. Uit $|AD| = \frac{1}{2}|DB|$ volgt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{3}$. Zo ook geldt $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{3}$. Dus $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$. Samen met $\angle DAE = \angle BAC$ (zelfde hoek) geldt nu $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ (zhz). Daaruit volgt $\angle ADE = \angle ABC$, dus wegens F-hoeken geldt $DE \parallel BC$ (onderdeel (a)). Bovendien geldt $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ (onderdeel (b)). □

Opgave 83. Laat P een punt zijn buiten de cirkel C met middelpunt M . Bewijs dat de raaklijnen² aan C die door P gaan even lang zijn.

²Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die de cirkel maar één keer snijdt. De lijn die het raakpunt verbindt met het middelpunt van de cirkel, staat loodrecht op de raaklijn.

Uitwerking. Noem de gemeenschappelijke punten van de raaklijnen met de cirkel X en Y . Dan geldt $\angle MXP = 90^\circ = \angle MYP$, aangezien het raaklijnen zijn. Uiteraard geldt $|MP| = |MP|$. Verder zijn $|MX|$ en $|MY|$ allebei de straal van de cirkel, dus zijn ook deze lengtes gelijk. Nu zien we dat $\triangle MXP \cong \triangle MYP$ (ZZR), waaruit direct volgt dat $|PX| = |PY|$. \square

Opgave 84. Zij $\triangle ABC$ een driehoek. De lijn ℓ door A die de hoek $\angle BAC$ precies in tweeën deelt noemen we de bissectrice van $\angle BAC$. Bewijs dat voor een punt P op ℓ geldt dat $d(P, AB) = d(P, AC)$. Hierbij staat $d(P, k)$ voor de afstand van het punt P tot de lijn k .

(Hint: als Q het punt op k is zodat PQ loodrecht op k staat, dan is $d(P, k) = |PQ|$.)

Uitwerking. Zij K het punt op AB zodat $\angle AKP = 90^\circ$ en zij L het punt op AC zodat $\angle ALP = 90^\circ$. Omdat $\angle PAK = \angle LAP$, $\angle AKP = 90^\circ = \angle ALP$ en $|AP| = |AP|$ zijn de driehoeken $\triangle APK$ en $\triangle APL$ congruent (ZHH). Er geldt dus dat $d(P, AB) = |PK| = |PL| = d(P, AC)$. \square

Opgave 85. Zij $\triangle ABC$ een driehoek. Zij K het midden van BC en zij L het midden van CA . Zij Z het snijpunt van AK en BL .

(a) Toon aan dat $|AB| = 2|KL|$.

(b) Toon aan dat $|AZ| = 2|ZK|$.

Uitwerking. Er geldt $|CA| = 2|CL|$ en $|CB| = 2|CK|$. Dit betekent dat $\frac{|CA|}{|CL|} = 2 = \frac{|CB|}{|CK|}$. Verder is natuurlijk $\angle BCA = \angle KCL$, dus $\triangle BCA \sim \triangle KCL$ (zhz). Daaruit volgt dat $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|KC|} = 2$ (onderdeel a). Bovendien geldt $\angle ABC = \angle LKC$, dus AB en KL zijn evenwijdig (F-hoeken). Omdat $AB \parallel KL$, geldt $\angle BAZ = \angle ZKL$ en $\angle ABZ = \angle ZLK$ (Z-hoeken). Met (hh) zien we dat $\triangle AZB \sim \triangle KZL$. Daaruit volgt nu dat $\frac{|AZ|}{|KZ|} = \frac{|AB|}{|KL|} = 2$ (onderdeel (b)). \square

Opgave 86. In driehoek $\triangle ABC$ is D een punt op zijde BC en E een punt op zijde AC , zodat $\angle ADB = \angle AEB$. Bewijs dat $\triangle ACB \sim \triangle DCE$.

Uitwerking. Uit $\angle ADB = \angle AEB$ volgt $\angle ADC = \angle BEC$. Samen met $\angle DCA = \angle ECB$ (zelfde hoek) krijgen we $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (hh). Dus $\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|EC|}$. Wegens alweer $\angle ACB = \angle DCE$ (zelfde hoek) volgt hieruit $\triangle ACB \sim \triangle DCE$ (zhz). \square

Opgave 87. Een zwaartelijn van een driehoek verbindt een hoekpunt met het midden van de tegenoverliggende zijde. Een driehoek heeft dus drie zwaartelijnen. Gebruik opgave

85(b) om te laten zien dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan (het zwaartepunt).

Uitwerking. We noemen de driehoek $\triangle ABC$. Zij K het midden van BC . Zij Z het snijpunt van AK met de zwaartelijijn door B . Vanwege opgave 85(b) weten we dat $|AZ| = 2|ZK|$. Zij Z' het snijpunt van AK met de zwaartelijijn door C . Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat $|AZ'| = 2|Z'K|$. Omdat Z en Z' allebei tussen A en K in liggen, moet er nu gelden dat $Z = Z'$. De zwaartelijnen door A , B en C gaan dus alle drie door hetzelfde punt Z . \square

11 Driehoeken

We gaan kijken naar een paar speciale driehoeken en hun eigenschappen.

11.1 Gelijkbenige driehoek

Een driehoek met twee even lange zijden noemen we een *gelijkbenige* driehoek. De hoek ingesloten door de gelijke zijden heet de *tophoek* en de andere hoeken heten de *basishoeken*. Over gelijkbenige driehoeken bestaat een heel bekende stelling:

Stelling 11.1.1 (Stelling van de gelijkbenige driehoek). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn.*

- als er geldt dat $\angle B = \angle C$, dan geldt er ook dat $|AB| = |AC|$;
- als er juist geldt dat $|AB| = |AC|$, dan geldt er ook dat $\angle B = \angle C$.

Met andere woorden, als je weet dat een driehoek gelijkbenig is (dus twee gelijke zijden heeft), dan weet je meteen ook dat de basishoeken gelijk zijn. Als je andersom weet dat een driehoek twee gelijke hoeken heeft, dan is het een gelijkbenige driehoek met als tophoek juist de derde hoek. Laten we eens kijken hoe we deze stelling kunnen bewijzen.

Bewijs.

- Neem aan dat we $\angle B = \angle C$ weten. Definieer dan D als het punt op BC waarvoor $\angle ADB = 90^\circ = \angle ADC$. Dan geldt $\triangle BDA \cong \triangle CDA$ (HHZ): immers, $\angle B = \angle C$, $\angle ADB = \angle ADC$ en $|AD| = |AD|$. Uit de congruentie volgt $|AB| = |AC|$ direct.
- Neem nu aan dat $|AB| = |AC|$. Laat D nu het midden van BC zijn, dan geldt $\triangle BDA \cong \triangle CDA$ (ZZZ). Er geldt namelijk dat $|AB| = |AC|$, $|BD| = |CD|$ en

$|AD| = |AD|$. Uit de congruentie volgt nu $\angle B = \angle C$. □

Omdat de stelling uit twee verschillende delen bestaat, hebben we voor elk deel een apart bewijs gegeven. Vanaf nu mogen we deze stelling zonder bewijs toepassen (want we hebben hem al bewezen). We weten dus nu dat een driehoek gelijkbenig is precies dan als hij twee gelijke hoeken heeft. Wiskundigen gebruiken ook wel de uitdrukking “dan en slechts dan als” hiervoor: voor een driehoek $\triangle ABC$ geldt $|AB| = |AC|$ dan en slechts dan als $\angle B = \angle C$.

We hadden eigenlijk net zo goed een gelijkbenige driehoek kunnen definiëren als een driehoek met twee gelijke hoeken. Met de stelling hierboven volgt daar toch uit dat de driehoek dan ook twee gelijke zijden heeft. We noemen dat *equivalente definities* van de gelijkbenige driehoek: het maakt niet uit of je een gelijkbenige driehoek nou op de ene of op de andere manier definieert.

In opgave 79 hebben we nog een andere bijzondere eigenschap van een gelijkbenige driehoek gezien: in een gelijkbenige driehoek vallen de *bissectrice* (de lijn die de hoek precies in tweeën deelt), de *zwaartelijn* (de lijn door het midden van de tegenoverliggende zijde) en de *hoogtelijn* (de lijn loodrecht op de tegenoverliggende zijde) van de tophoek samen. Deze drie lijnen zijn dus hetzelfde. Dit geldt ook andersom: als twee van deze lijnen samenvallen, dan is de driehoek ook automatisch gelijkbenig. In opgave 88 bewijs je dit voor de hoogtelijn en de zwaartelijn en voor de hoogtelijn en de bissectrice. Al met al hebben we dus de volgende vijf equivalente definities van de gelijkbenige driehoek:

Equivalente definities 1 (Gelijkbenige driehoek). *Een gelijkbenige driehoek is een driehoek*

- met twee gelijke hoeken;
- met twee gelijke zijden;
- waarin een hoogtelijn samenvalt met een zwaartelijn;
- waarin een hoogtelijn samenvalt met een bissectrice;
- waarin een bissectrice samenvalt met een zwaartelijn.

11.2 Gelijkzijdige driehoek

Een driehoek waarvan zelfs alle drie de zijden even lang zijn, heet een *gelijkzijdige* driehoek. Ook deze speciale eigenschap kunnen we vertalen in de hoeken van de driehoek.

Stelling 11.2.1 (Stelling van de gelijkzijdige driehoek). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt $|AB| = |BC| = |CA|$ dan en slechts dan als $\angle A = \angle B = \angle C$.*

Bewijs. Omdat dit een “dan en slechts dan”-stelling is, bestaat het bewijs weer uit twee delen.

- Neem eerst aan dat $|AB| = |BC| = |CA|$. Omdat $|AB| = |BC|$, is de driehoek gelijkbenig met tophoek B en geldt volgens de stelling van de gelijkbenige driehoek dat $\angle A = \angle C$. Ook weten we dat $|BC| = |CA|$ en dus is de driehoek gelijkbenig met tophoek C . Hieruit volgt $\angle A = \angle B$. Als we dit samenvoegen, zien we dat $\angle A = \angle B = \angle C$.
- Neem nu aan dat $\angle A = \angle B = \angle C$. We passen weer de stelling van de gelijkbenige driehoek toe, maar nu de andere kant op. Uit $\angle A = \angle B$ volgt dat $|CA| = |BC|$ (want $\triangle ABC$ is gelijkbenig met tophoek C) en uit $\angle A = \angle C$ volgt dat $|AB| = |BC|$ (want $\triangle ABC$ is gelijkbenig met tophoek B). Dus $|AB| = |BC| = |CA|$. \square

De som van de hoeken van elke driehoek is 180° , dus dat geldt ook voor een gelijkzijdige driehoek. Omdat alle hoeken van een gelijkzijdige driehoek ook nog eens gelijk zijn, moeten al deze hoeken dan gelijk zijn aan 60° . Andersom geldt natuurlijk dat als twee hoeken van een driehoek allebei 60° zijn, dat dan de derde ook wel 60° moet zijn en daar volgt dan weer uit dat de driehoek gelijkzijdig is. Al met al krijgen we de volgende equivalente definities voor een gelijkzijdige driehoek:

Equivalente definities 2 (Gelijkzijdige driehoek). *Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek*

- *waarin alle hoeken gelijk zijn;*
- *waarin twee hoeken gelijk zijn aan 60° ;*
- *met drie gelijke zijden;*
- *die gelijkbenig is met een tophoek van 60° .*

Onthoud deze equivalente definities, zodat je op elk moment degene kunt gebruiken die in die situatie het handigste uitkomt.

11.3 Rechthoekige driehoek

Ten slotte zijn er nog de driehoeken waarvan een van de hoeken gelijk is 90° . Aangezien een hoek van 90° een rechte hoek genoemd wordt, zegt men dat zo'n driehoek *rechthoekig* is. Een zeer beroemde stelling over dit soort driehoeken is de stelling van Pythagoras.

Stelling 11.3.1 (Stelling van Pythagoras). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt $\angle A = 90^\circ$ dan en slechts dan als $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.*

Bewijs. Door de “dan en slechts dan” bestaat dit bewijs weer uit twee delen.

- Stel dat $\angle A = 90^\circ$ en laat D het punt op BC zijn zodat $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$. Dan geldt $\angle ABC = \angle DBA$ en $\angle ADB = 90^\circ = \angle CAB$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (hh). Verder is $\angle ACB = \angle DCA$ en $\angle CDA = 90^\circ = \angle CAB$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (hh).

Uit de eerste gelijkvormigheid volgt $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DB|}{|BA|}$ en uit de tweede volgt $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|}$. Omdat $|BD| + |DC| = |BC|$, geldt

$$|BC|^2 = |BC| \cdot (|BD| + |DC|) = |BC| \cdot |BD| + |BC| \cdot |DC|.$$

Als we de verhoudingen die we net gevonden hebben, kruislings vermenigvuldigen, krijgen we $|BC| \cdot |BD| = |AB|^2$ en $|BC| \cdot |DC| = |AC|^2$. Dit vullen we in en we vinden $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.

- Stel nu dat $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$. We construeren nu een rechthoekige driehoek $\triangle DEF$ met een rechte hoek bij D en rechthoekszijden DE even lang als AB en DF even lang als AC . Er geldt dus $|DE| = |AB|$ en $|DF| = |AC|$. Omdat $\triangle DEF$ rechthoekig is (zo hebben we hem immers geconstrueerd) geldt volgens het eerste deel van de stelling Pythagoras (wat we inmiddels bewezen hebben!) dat $|DE|^2 + |DF|^2 = |EF|^2$. Dus we zien dat $|EF|^2 = |DE|^2 + |DF|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, dus $|EF| = |BC|$. De zijden van $\triangle DEF$ zijn dus precies net zo lang als de zijden van $\triangle ABC$. Op grond van congruentiegeval ZZZ mogen we concluderen dat $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Daaruit volgt dat $\angle A = \angle D = 90^\circ$, dus inderdaad is $\triangle ABC$ rechthoekig. \square

11.4 Opgaven

Opgave 88. *Bekijk een driehoek $\triangle ABC$. De hoogtelijn uit A snijdt BC in D (dus $\angle ADB = 90^\circ$), de zwaartelijn uit A snijdt BC in E (dus $|BE| = |CE|$) en de bissectrice uit A snijdt BC in F (dus $\angle FAB = \angle FAC$). Bewijs:*

- (a) *Als $D = E$, dan is $\triangle ABC$ gelijkbenig;*
 (b) *Als $D = F$, dan is $\triangle ABC$ gelijkbenig.*

Uitwerking. Het bewijs berust telkens op een tweetal congruente driehoeken. Als $D = E$ dan zijn de driehoeken $\triangle ADB$ en $\triangle ADC$ congruent vanwege ZHZ (immers, $|AD| = |AD|$, $\angle ADB = \angle ADC$ en $|BD| = |CD|$) dus $|AB| = |AC|$ (a). Als $D = F$ dan zijn weer de driehoeken $\triangle ADB$ en $\triangle ADC$ congruent, maar nu vanwege HZH (immers, $\angle DAB = \angle DAC$, $|AD| = |AD|$ en $\angle ADB = \angle ADC$). We vinden weer $|AB| = |AC|$ (b). \square

Opgave 89. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. De punten S en T liggen in het vlak zodanig dat $\triangle ABS$ en $\triangle ACT$ gelijkzijdige driehoeken zijn die $\triangle ABC$ niet overlappen. Bewijs dat $|BT| = |CS|$.*

Uitwerking. Doordat $\triangle ABS$ gelijkzijdig is, geldt $|SA| = |BA|$. Doordat $\triangle ACT$ gelijkzijdig is, geldt $|TA| = |CA|$. Verder zijn de hoeken $\angle CAT$ en $\angle SAB$ allebei gelijk aan 60° . Dus geldt $\angle BAT = \angle BAC + \angle CAT = \angle BAC + 60^\circ = \angle BAC + \angle SAB = \angle SAC$. Hiermee vinden we de congruentie $\triangle BAT \cong \triangle SAC$ (ZHZ). Hieruit volgt direct dat $|BT| = |CS|$. \square

Opgave 90. In een rechthoekige driehoek $\triangle ABC$ met $\angle C = 90^\circ$ ligt punt D op zijde AB zodat $\angle ADC = 90^\circ$. Bewijs dat $|CD| = \sqrt{|AD||BD|}$.

Uitwerking. Vanwege twee keer (hh) geldt $\triangle ADC \sim \triangle ACB \sim \triangle CDB$. Daaruit volgt $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}$. Dus $|CD|^2 = |AD||BD|$. \square

Opgave 91. Laat $ABCD$ een vierhoek zijn waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Bewijs dat $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

Uitwerking. Noem het snijpunt van de diagonalen S . Dan levert de stelling van Pythagoras in driehoeken $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$ en $\triangle DSA$ (hoek S is in alle gevallen immers recht):

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |SA|^2 + |SB|^2, \\ |BC|^2 &= |SB|^2 + |SC|^2, \\ |CD|^2 &= |SC|^2 + |SD|^2, \\ |DA|^2 &= |SD|^2 + |SA|^2. \end{aligned}$$

Dus $|AB|^2 + |CD|^2 = |SA|^2 + |SB|^2 + |SC|^2 + |SD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$. \square

Opgave 92 (Stelling van Thales). Bekijk een cirkel met middellijn AB en een punt C op de cirkel, ongelijk aan A en B . Bewijs dat $\angle ACB = 90^\circ$.

Uitwerking. Laat M het middelpunt van de cirkel zijn. Dan is driehoek $\triangle MAC$ gelijkbenig met tophoek M , omdat $|AM|$ en $|CM|$ allebei de straal van de cirkel zijn. Dus $\angle MAC = \angle ACM$. Zo ook is $\triangle MBC$ gelijkbenig met tophoek M , dus $\angle CBM = \angle MCB$. Verder geldt volgens de hoekensom in driehoek $\triangle ABC$ dat

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA \\ &= \angle MAC + \angle ACM + \angle MCB + \angle CBM \\ &= 2\angle ACM + 2\angle MCB. \end{aligned}$$

Dus $90^\circ = \angle ACM + \angle MCB = \angle ACB$. \square

Opgave 93. Op een gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$ zetten we aan de buitenkant gelijkbenige driehoeken $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ en $\triangle CAR$, zodat de tophoeken $\angle APB$, $\angle BQC$ en $\angle CRA$ allemaal gelijk zijn en groter dan 60° . Bewijs dat $\triangle PQR$ gelijkzijdig is.

Uitwerking. Omdat de driehoeken ABP , BCQ en CAR gelijke tophoeken hebben, hebben ze ook gelijke basishoeken. Daarom zijn ze alle drie aan elkaar gelijkvormig. Ze zijn bovendien congruent omdat $|AB| = |BC| = |CA|$. Dus geldt $|AP| = |PB| = |BQ| = |QC| = |CR| = |RA|$. Verder geldt

$$\angle PBA + \angle ABC + \angle CBQ = \angle QCB + \angle BCA + \angle ACR = \angle RAC + \angle CAB + \angle BAP,$$

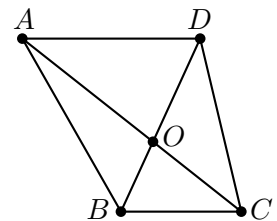
oftewel $\angle PBQ = \angle QCR = \angle RAP$. Wegens (ZHZ) geldt nu $\triangle PBQ \cong \triangle QCR \cong \triangle RAP$. Dus $|PQ| = |QR| = |RP|$. \square

Opgave 94. Aan weerszijden van lijn AB liggen de punten C en D zodat driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle ABD$ gelijkbenig zijn met tophoeken respectievelijk C en D . Bewijs dat CD loodrecht staat op AB .

(Uit deze opgave volgt dat de punten X waarvoor geldt dat $|AX| = |XB|$ allemaal op één lijn liggen die loodrecht staat op AB . Deze lijn heet de middelloodlijn van het lijnstuk AB .)

Uitwerking. Noem S het snijpunt van AB en CD . Omdat $|AC| = |BC|$, $|AD| = |BD|$ en $|CD| = |CD|$, geldt $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (ZZZ). Daarom is $\angle ACD = \angle BCD$ en dus ook $\angle ACS = \angle BCS$. Ook geldt vanwege de gelijkbenigheid van $\triangle ABC$ dat $\angle BAC = \angle ABC$ en dus ook $\angle SAC = \angle SBC$. Met de hoekensom in driehoeken $\triangle ASC$ en $\triangle BSC$ of met gelijkvormigheid (hh) zien we nu dat $\angle ASC = \angle BSC$. Beide hoeken moeten nu 90° zijn. \square

Opgave 95 (Finale 2013). Van een vierhoek $ABCD$ is BC evenwijdig aan AD en is O het snijpunt van de diagonalen AC en BD . Voor deze vierhoek geldt $|CD| = |AO|$ en $|BC| = |OD|$. Verder is CA de bissectrice van hoek $\angle BCD$ (er geldt dus $\angle BCA = \angle ACD$). Bepaal de grootte van hoek $\angle ABC$.



Uitwerking. We bewijzen eerst dat een aantal driehoeken in de figuur gelijkbenig zijn (de tophoek komt steeds overeen met de middelste letter).

- (1) Vanwege Z-hoeken ($AD \parallel BC$) geldt $\angle DAC = \angle ACB$. Omdat AC de bissectrice van $\angle BCD$ is, geldt $\angle ACB = \angle ACD$. Samen geeft dit $\angle DAC = \angle ACD$, dus $\triangle ADC$ is gelijkbenig.
- (2) Hiermee zien we dat $|AD| = |CD|$. Uit de opgave weten we dat $|CD| = |AO|$. Er geldt dus $|AD| = |AO|$ en $\triangle DAO$ is gelijkbenig.

- (3) Driehoek BCO is gelijkbenig, want hij is gelijkvormig met driehoek DAO (zandloperfiguur).
- (4) Er geldt $|DO| = |BC|$ (gegeven) en $|BC| = |CO|$ uit de vorige gelijkbenigheid. Samen geeft dit $|DO| = |CO|$, dus $\triangle COD$ is gelijkbenig.
- (5) Er geldt $\angle DBC = \angle OBC$ en $\angle BDC = \angle DCO = \angle OCB$ (de voorlaatste gelijkheid vanwege (4)). Met (hh) zien we dat $\triangle BDC \sim \triangle BCO$, dus $\triangle BDC$ is ook gelijkbenig.
- (6) Uit (1) en (5) volgt $|AD| = |CD| = |BD|$, dus driehoek $\triangle ADB$ is gelijkbenig.

We noemen $\angle ACB = \alpha$ en $\angle CBD = \beta$ (in graden). Uit (5) volgt dat $2\alpha = \beta$. Uit (3) volgt dat $180^\circ = 2\beta + \alpha = 5\alpha$, dus $\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ en $\beta = 72^\circ$. In de gelijkbenige driehoek $\triangle ADB$ is de tophoek gelijk aan $\angle ADB = \beta$, dus de twee gelijke basishoeken zijn $\frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$. De gevraagde hoek is nu $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ$. \square

12 Vierhoeken

Een *vierhoek* bestaat uit vier punten en vier zijden. We geven de punten aan met hoofdletters, waarbij je even op de volgorde moet letten: bij een vierhoek $ABCD$ kom je de punten A , B , C en D in die volgorde tegen als je een rondje loopt over de zijden. Zo'n vierhoek heeft dus zijden AB , BC , CD en DA . De *diagonalen* van de vierhoek zijn AC en BD .

Net als driehoeken hebben ook vierhoeken een vaste hoekensom: de som van de hoeken van een vierhoek is altijd gelijk aan 360° . Dat kun je inzien door de vierhoek op te delen in twee driehoeken door één van de diagonalen te tekenen.

We bekijken een aantal speciale vierhoeken.

12.1 Trapezium

Een *trapezium* is een vierhoek met minstens één paar evenwijdige zijden. Als $ABCD$ een trapezium is met AB evenwijdig aan CD , dan zijn vanwege U-hoeken (zie opgave 75) de hoeken $\angle B$ en $\angle C$ samen 180° . Dit geldt ook voor $\angle A$ en $\angle D$.

Andersom is het zo dat als in een vierhoek $ABCD$ geldt dat $\angle B + \angle C = 180^\circ$, dat dan wegens U-hoeken de zijden AB en CD evenwijdig zijn. Dus we hebben de volgende equivalente definities voor een trapezium:

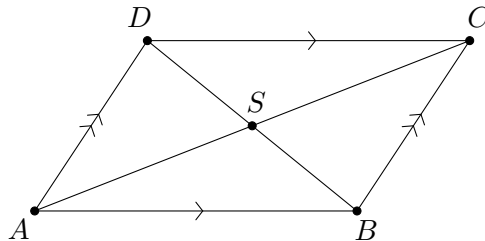
Equivalente definities 3 (Trapezium). *Een trapezium is een vierhoek*

- met een paar evenwijdige zijden;
- waarin er twee aangrenzende hoeken zijn die samen 180° zijn.

Let op: een trapezium hoeft niet gelijkbenig te zijn. Met andere woorden, de twee niet-evenwijdige zijden hoeven niet even lang te zijn.

12.2 Parallellogram

Een *parallellogram* een vierhoek met twee paren evenwijdige, oftewel parallelle (vandaar de naam) zijden. Dit is dus een speciaal trapezium: eentje waarin het andere paar zijden ook evenwijdig is. Parallellogrammen hebben allerlei bijzondere eigenschappen. Het voorbeeld hieronder laat er één van zien.



Figuur 6. *Figuur bij voorbeeld 14.*

Voorbeeld 14. *Laat $ABCD$ een parallellogram zijn (zie figuur 6). Bewijs dat de diagonalen AC en BD elkaar middendoor delen (dat wil zeggen, het snijpunt van de diagonalen is het midden van lijnstuk AC en ook het midden van lijnstuk BD).*

Oplossing. Wegens Z-hoeken geldt $\angle ADB = \angle CBD$ en $\angle ABD = \angle CDB$. Omdat driehoeken $\triangle ABD$ en $\triangle CDB$ allebei zijde BD bevatten, zijn deze twee driehoeken congruent (HZH). Hieruit volgt $|AB| = |CD|$ en $|AD| = |CB|$. (Dit is een van de andere bijzondere eigenschappen van een parallellogram: de overstaande zijden zijn even lang.) Noem S het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram. We weten al $|AD| = |CB|$ en $\angle ADS = \angle CBS$. Verder geldt vanwege overstaande hoeken dat $\angle ASD = \angle CSB$, dus we vinden de congruentie $\triangle ADS \cong \triangle CBS$ (HHZ). Hieruit volgt $|AS| = |CS|$ (dus S is het midden van AC) en $|DS| = |BS|$ (dus S is het midden van BD). Dus de diagonalen snijden elkaar middendoor. \square

Andersom kun je ook bewijzen dat als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, deze vierhoek een parallellogram moet zijn. Zo vinden we weer een aantal equivalente definities:

Equivalente definities 4 (Parallelogram). *Een parallellogram is een vierhoek*

- *met twee paren evenwijdige zijden;*
- *met twee paren gelijke overstaande zijden;*
- *waarin twee overstaande zijden gelijk en evenwijdig zijn;*
- *waarin de diagonalen elkaar middendoor delen.*

Dit zijn niet de enige equivalente definities van een parallellogram. Er mag met enige mate geschoven worden met de eigenschappen, zoals opgave 97 laat zien.

12.3 Ruit

Een parallellogram heeft twee paren gelijke zijden. Als alle vier de zijden even lang zijn, dan noemen we de vierhoek een *ruit*. Een ruit is dus een bijzonder parallellogram. We kunnen de ruit definiëren als een parallellogram met een extra eigenschap, bijvoorbeeld één van degene hieronder:

Equivalente definities 5 (Ruit). *Een ruit is*

- *een vierhoek met vier gelijke zijden;*
- *een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt;*
- *parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.*

In het bijzonder geldt dus dat iedere vierhoek met vier gelijke zijden automatisch een parallellogram is.

12.4 Rechthoek

Een ander speciaal geval van een parallellogram is de *rechthoek*. Ook deze kunnen we op meerdere manieren definiëren.

Equivalente definities 6 (Rechthoek). *Een rechthoek is*

- *een vierhoek met vier rechte hoeken;*
- *een parallellogram met een rechte hoek;*
- *een parallellogram met gelijke diagonalen.*

12.5 Vierkant

Ten slotte is er nog een heel bekend geval: het *vierkant*. Het is zowel een bijzondere situatie van de ruit als van de rechthoek (en dus automatisch ook van het parallellogram). Hierdoor zijn er vele manieren om het vierkant te definiëren (zie opgave 96). De meest bekende definitie is: een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken.

12.6 Opgaven

Opgave 96. *Bedenk zelf minstens vier equivalente definities voor een vierkant.*

Uitwerking. Hieronder staan een aantal mogelijke definities.

- Een ruit met een rechte hoek;
- Een ruit met gelijke diagonalen;
- Een rechthoek waarin een diagonaal een hoek doormidden deelt;
- Een rechthoek waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan.

□

Opgave 97. *Geef bij de volgende opgaven steeds een tegenvoorbeeld of een bewijs.*

- Laat $ABCD$ een vierhoek zijn met S het snijpunt van de diagonalen. Stel dat S het midden van AC is en geldt dat AB en CD evenwijdig zijn. Is $ABCD$ een parallellogram?*
- Laat $ABCD$ een vierhoek zijn met $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Is $ABCD$ een parallellogram?*
- Laat $ABCD$ een vierhoek zijn. Stel dat de zijden AD en BC evenwijdig zijn en dat geldt $|AB| = |CD|$. Is $ABCD$ een parallellogram?*

Uitwerking.

- Ja. Door overstaande hoeken geldt $\angle ASB = \angle CSD$ en door Z-hoeken $\angle SAB = \angle SCD$. Verder weet men ook dat $|SA| = |SC|$, waaruit de congruentie $\triangle ASB \cong \triangle CSD$ (HZH). Dus $|SB| = |SD|$ en S is het midden van beide diagonalen, waarmee bewezen is dat $ABCD$ een parallellogram is.
- Ja. We weten dat $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ en er is gegeven dat $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Daaruit volgt dat $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Daaruit volgt met U-hoeken, zie

opgave 75, dat AD en BC evenwijdig zijn. Op dezelfde manier kun je bewijzen dat AB en CD evenwijdig zijn. Dat betekent dat $ABCD$ een parallellogram is.

(c) Nee. Deze vierhoek kan bijvoorbeeld ook een gelijkbenig trapezium zijn.

□

Opgave 98. Laat $ABCD$ een trapezium zijn met $AB \parallel CD$. Op de lijn CD ligt een punt X zodat $\angle CBX = \angle ABX$. Op de lijn AB ligt een punt Y zodat $\angle BCY = \angle DCY$. Bewijs dat de lijnen BX en CY elkaar loodrecht snijden.

Uitwerking. Noem S het snijpunt van BX en CY . Omdat $AB \parallel CD$, geldt wegens U-hoeken dat $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$. Dus $\angle XBC + \angle BCY = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCD = 90^\circ$. Wegens de hoekensom in $\triangle BCS$ geldt nu $\angle BSC = 90^\circ$. □

Opgave 99. Op een cirkel met middelpunt M liggen verschillende punten A , B en P zodat AB een middellijn³ van de cirkel is. Op de lijn MP ligt een punt N zodat P het midden is van MN . Op de lijn door N evenwijdig aan AB liggen punten C en D zodat N het midden is van CD , $|CD| = |AB|$, en B en C aan dezelfde kant van MN liggen. Bewijs dat $ABCD$ een ruit is.

Uitwerking. Omdat AB en CD evenwijdig en even lang zijn, is $ABCD$ een parallellogram. We moeten nu nog laten zien dat twee aangrenzende zijden even lang zijn, zodat het ook een ruit is. De lijnstukjes AM en DN zijn even lang, omdat $|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD| = |DN|$. Omdat AM en DN ook nog evenwijdig zijn, is $AMND$ een parallellogram. Dus $|AD| = |MN|$. Omdat A , B en P op de cirkel met middelpunt M liggen, geldt $|AM| = |BM| = |PM|$ en dus $|MN| = 2|PM| = 2|AM| = |AB|$. We concluderen dat $|AD| = |AB|$. Het parallellogram $ABCD$ heeft dus vier gelijke zijden en is daarmee een ruit. □

Opgave 100. Binnen in een rechthoek $ABCD$ kiezen we een punt P . Op zijden AB , BC , CD en DA liggen respectievelijk punten K , L , M en N zodat de lijnen PK , PL , PM en PN loodrecht staan op de respectievelijke zijden. Vind alle punten P zodat $KLMN$ een ruit is.

Uitwerking. Wegens Pythagoras geldt $|KL|^2 = |BK|^2 + |BL|^2$ en $|LM|^2 = |CL|^2 + |CM|^2$. Dus $|KL| = |LM|$ precies dan als $|BK|^2 + |BL|^2 = |CL|^2 + |CM|^2$. De lijnen PK en PM zijn allebei evenwijdig aan BC en gaan allebei door P ; deze lijnen vallen dus samen. In de rechthoek $KBCM$ zien we nu dat $|BK| = |CM|$. We concluderen dat $|KL| = |LM|$

³ AB is een middellijn als het middelpunt van de cirkel op AB ligt.

precies dan als $|BL|^2 = |CL|^2$, oftewel als L het midden is van BC . Op dezelfde manier zien we dat $|LM| = |MN|$ precies dan als M het midden is van CD , dat $|MN| = |NK|$ precies dan als N het midden is van DA , en dat $|NK| = |KL|$ precies dan als K het midden is van AB . Dus $KLMN$ is een ruit precies dan als de punten K , L , M en N de middens van de zijden van $ABCD$ zijn, oftewel precies dan als P het midden van de rechthoek is (het snijpunt van de diagonalen). \square

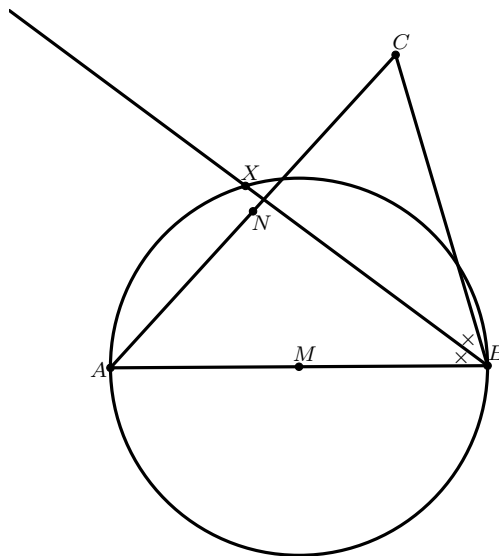
Opgave 101 (Finale 2000). *Laat $ABCD$ een parallellogram zijn. Aan de buitenkant van het parallellogram wordt op zijde AB een gelijkzijdige driehoek ABP gezet, en op zijde AD een gelijkzijdige driehoek ADQ . Bewijs dat driehoek $\triangle CPQ$ gelijkzijdig is.*

Uitwerking. Neem voor de volgende oplossing aan dat in het parallellogram hoek $\angle A$ minstens even groot is als hoek $\angle D$. In het andere geval kun je een soortgelijke oplossing vinden.

In een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk, dus $|CD| = |AB|$. Verder geldt in de gelijkzijdige driehoek $\triangle ABP$ dat $|AB| = |BP| = |AP|$, dus $|CD| = |BP| = |AP|$. Op dezelfde manier vinden we $|BC| = |DQ| = |AQ|$. Verder geldt in het parallellogram $\angle ADC = \angle CBA$, dus $\angle QDC = 60^\circ + \angle ADC = 60^\circ + \angle CBA = \angle CBP$. Daarnaast geldt $\angle QAP = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - \angle BAD$ en $\angle BAD = 180^\circ - \angle CBA$, dus $\angle QAP = 240^\circ - (180^\circ - \angle CBA) = 60^\circ + \angle CBA = \angle CBP$. Dus we hebben $\angle QDC = \angle CBP = \angle QAP$. Gecombineerd met de gelijke lengtes die we al hadden, krijgen we $\triangle QAP \cong \triangle QDC \cong \triangle CBP$ (ZHZ). Daaruit volgt $|QP| = |QC| = |CP|$ en dat betekent dat $\triangle CPQ$ gelijkzijdig is. \square

13 Gemengde opgaven

Opgave 102 (Finale 2023). In scherphoekige driehoek ABC met $|BC| < |BA|$ is M het midden van AB en N het midden van AC . De cirkel met middellijn AB snijdt de bissectrice van $\angle B$ in twee punten: B en X .
Bewijs dat M , N en X op één lijn liggen.

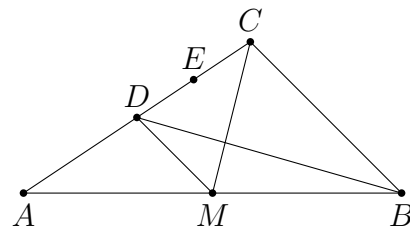


Uitwerking. We zullen laten zien dat zowel MX als MN evenwijdig is met BC . Omdat de twee lijnen door hetzelfde punt M gaan, volgt hieruit dat het dezelfde lijn is en dus liggen M , N en X op één lijn.

Om te laten zien dat MX evenwijdig is met BC , merken we op dat BMX een gelijkbenige driehoek is met tophoek M . Immers, MX en MB zijn de straal van de cirkel. Hieruit volgt dat $\angle MXB = \angle MBX$. Omdat ook $\angle MBX = \angle XBC$, zijn $\angle MXB$ en $\angle XBC$ Z-hoeken, en dus zijn MX en BC evenwijdig.

Om te laten zien dat MN evenwijdig is met BC , merken we op dat driehoek ABC en AMN gelijkvormig zijn, aangezien $\frac{|AN|}{|AC|} = \frac{1}{2} = \frac{|AM|}{|AB|}$ en $\angle BAC = \angle MAN$ (zhz). Hieruit volgt dat $\angle AMN = \angle ABC$ en vanwege F-hoeken zijn MN en BC dus evenwijdig. \square

Opgave 103 (Finale 2021). In driehoek ABC geldt $\angle ACB = 90^\circ$. Het punt M is het midden van AB . De lijn door M evenwijdig aan BC snijdt AC in het punt D . Het midden van lijnstuk CD is E . Er geldt dat BD de lijn CM loodrecht snijdt.

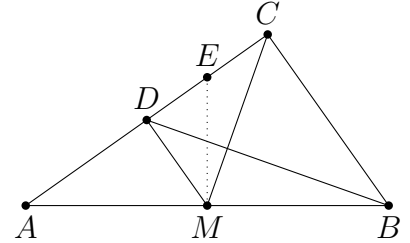


Let op: de figuur is niet op schaal getekend.

- Bewijs dat driehoeken CME en ABD gelijkvormig zijn.
- Bewijs dat EM loodrecht op AB staat.

Uitwerking.

- (a) We lossen dit probleem in twee stappen op. Eerst bewijzen we dat $\triangle CMD \sim \triangle ABC$. Daarna gebruiken we dit om te laten zien dat $\triangle CME \sim \triangle ABD$. Omdat BC en MD parallel zijn, vinden we dat $\angle ADM = \angle ACB = 90^\circ$ en ook $\angle AMD = \angle ABC$. Hieruit volgt dat $\triangle ABC \sim \triangle AMD$. Omdat $|AB| = 2|AM|$, geldt ook dat $|AC| = 2|AD|$ en dus $|AD| = |DC|$. Hieruit volgt de congruentie $\triangle AMD \cong \triangle CMD$: beide driehoeken hebben een rechte hoek bij D en de twee aanliggende zijdes zijn gelijk. Nu hebben we dat $\triangle ABC \sim \triangle AMD \cong \triangle CMD$, en dus geldt dat $\triangle CMD \sim \triangle ABC$.



Uit deze congruentie volgt dat $\angle ECM = \angle DCM = \angle CAB = \angle DAB$, en ook dat

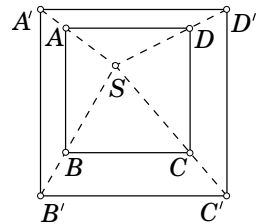
$$\frac{|EC|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|DC|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|CA|}{|AB|} = \frac{|DA|}{|AB|}.$$

Hieruit volgt dat $\triangle CME \sim \triangle ABD$: de driehoeken hebben een gelijke hoek en de twee aanliggende zijdes hebben dezelfde verhouding.

- (b) Laat F het snijpunt zijn van BD en CM . Omdat BD loodrecht staat op CM is $\angle BFM = 90^\circ$. In de driehoek $\triangle BFM$ is dan $\angle BMF + \angle FBM = 90^\circ$. Vanwege de gelijkvormige driehoeken uit onderdeel (a) is $\angle FBM = \angle ABD = \angle CME = \angle FME$. Er volgt dat $\angle BMF + \angle FME = 90^\circ$ en dus staat EM loodrecht op AB .

□

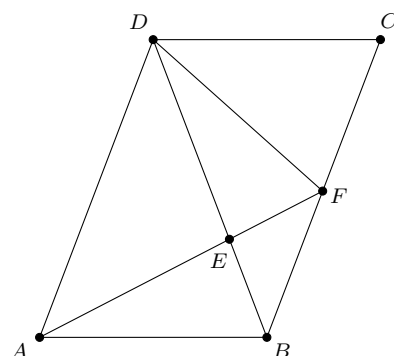
Opgave 104 (Finale 2008). *Gegeven zijn twee vierkanten $ABCD$ en $A'B'C'D'$, zodat $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$ en $DA \parallel D'A'$. Het vierkant $ABCD$ ligt helemaal binnen het vierkant $A'B'C'D'$. Het blijkt verder dat de lijnen AA' , BB' , CC' en DD' elkaar snijden in een punt S . Bewijs dat de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $A'ABB'$ en $C'CDD'$ gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $B'BCC'$ en $D'DAA'$.*



Uitwerking. Er geldt dat $[ABB'A'] = [SA'B'] - [SAB]$ (met de vierkante haken geven we hier oppervlakte aan). Net zo is $[CDD'C'] = [SC'D'] - [SCD]$, dus $[ABB'A'] + [CDD'C'] = [SA'B'] + [SC'D'] - [SAB] - [SCD]$. Zij h_1 de afstand van S tot $A'B'$ en zij h_2 de afstand van S tot $C'D'$. Dan is $h_1 + h_2$ gelijk aan de zijdelengte q van $A'B'C'D'$. Verder is $[SA'B'] = \frac{1}{2}qh_1$ en $[SC'D'] = \frac{1}{2}qh_2$, dus $[SA'B'] + [SC'D'] = \frac{1}{2}qh_1 + \frac{1}{2}qh_2 = \frac{1}{2}q(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}q^2$. De oppervlakte van driehoeken $\triangle SA'B'$ en $\triangle SC'D'$ samen is dus

precies de helft van de oppervlakte van het vierkant $A'B'C'D'$. Analoog is $[SAB] + [SCD]$ gelijk aan de helft van de oppervlakte van het vierkant $[ABCD]$. En dat betekent dat $[ABB'A'] + [CDD'C'] = ([SA'B'] + [SC'D']) - ([SAB] + [SCD]) = \frac{1}{2}[A'B'C'D'] - \frac{1}{2}[ABCD]$ weer gelijk is aan de helft van het verschil in oppervlaktes tussen $A'B'C'D'$ en $ABCD$. Dat laatste is precies wat we moesten bewijzen. \square

Opgave 105 (Finale 2017). *Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $|AD| = |BD|$. Op lijnstuk BD ligt een punt E zo dat $|AE| = |DE|$. Het verlengde van AE snijdt lijnstuk BC in F . Gegeven is dat lijn DF de bissectrice is van hoek CDE . Bepaal de grootte van hoek ABD .*



Uitwerking. Driehoek AED is gelijkbenig en dus zijn hoeken $\angle EDA$ en $\angle DAE$ gelijk. Die hoeken zijn op hun beurt weer gelijk aan hoeken $\angle EBF$ en $\angle BFE$, vanwege Z-hoeken. Hieruit leiden we af dat driehoek BFE ook gelijkbenig is en dat $|BE| = |EF|$.

Als we nu kijken naar driehoek ABE en driehoek DFE dan zien we dat $|AE| = |DE|$ en $|BE| = |FE|$. Ook zien we dat $\angle BEA$ overstaand is aan $\angle FED$. Driehoeken ABE en DFE zijn dus congruent (ZHZ).

Uit deze congruentie volgt dat $|DF| = |AB|$ en omdat $ABCD$ een parallellogram is, geldt ook dat $|AB| = |CD|$. We zien dus dat driehoek CDF ook gelijkbenig is (met tophoek D).

Eenzijds volgt hieruit dat $\angle FCD = \angle DFC$. Anderzijds weten we vanwege $|BD| = |AD| = |BC|$ dat driehoek DBC gelijkbenig is, zodat $\angle FCD = \angle CDB = 2 \cdot \angle CDF$, omdat DF de bissectrice is van hoek CDB .

Alles bij elkaar hebben we dus $\angle DFC = \angle FCD = 2 \cdot \angle CDF$. We weten echter ook dat de hoekensom in een driehoek altijd 180 graden is, zodat geldt:

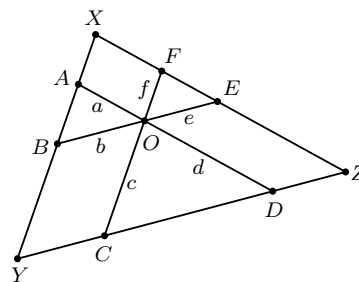
$$180^\circ = \angle DFC + \angle FCD + \angle CDF = 5 \cdot \angle CDF.$$

Hieruit volgt $\angle CDF = \frac{1}{5} \cdot 180^\circ = 36^\circ$ en dus $\angle FCD = 2 \cdot \angle CDF = 72^\circ$. Vanwege gelijkbenigheid geldt ook $\angle CDB = 72^\circ$. Vanwege Z-hoeken vinden we dus dat $\angle ABD = \angle CDB = 72^\circ$. \square

Opgave 106 (Finale 2010). Door een punt O in het inwendige van een driehoek XYZ gaan drie lijnen die evenwijdig zijn aan de zijden van de driehoek. Zo ontstaan op deze lijnen zes lijnstukken van O tot de zijden.

Gegeven is dat de lengten a, b, c, d, e, f van deze lijnstukken positieve gehele getallen zijn.

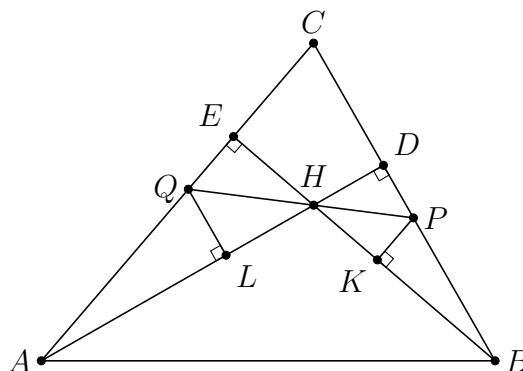
Bewijs dat het product $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$ het kwadraat van een geheel getal is.



Uitwerking. Omdat OA evenwijdig is aan XZ geldt wegens F-hoeken $\angle OAB = \angle ZXY$. Dankzij evenwijdigheid van OB en YZ geldt wegens F-hoeken $\angle ABO = \angle XYZ$. Nu concluderen we dat $\triangle OAB \sim \triangle ZXY$ (hh). Dat betekent in het bijzonder dat er een schalingsfactor u is zodat $a = u|XZ|$ en $b = u|YZ|$.

Op geheel analoge wijze zijn driehoeken OCD en OEF gelijkvormig met XYZ respectievelijk YZX . Hieruit volgt dat er schalingsfactoren v en w zijn zodat $c = v|XY|$, $d = v|XZ|$, $e = w|YZ|$ en $f = w|XY|$. Nu zien we dat $a \cdot c \cdot e = uvw \cdot |XY| \cdot |YZ| \cdot |XZ| = b \cdot d \cdot f$. In het bijzonder geldt dus dat $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = (a \cdot c \cdot e)^2$. Dit is een kwadraat aangezien gegeven is dat a, c en e geheel zijn. \square

Opgave 107 (Finale 2012). Gegeven is een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ met punten D op BC en E op AC zodanig dat AD loodrecht staat op BC en BE loodrecht staat op AC . Het snijpunt van AD en BE heet H . Een lijn door H snijdt lijnstuk BC in P en snijdt lijnstuk AC in Q . Verder is K een punt op BE zodanig dat PK loodrecht staat op BE en is L een punt op AD zodanig dat QL loodrecht staat op AD . Bewijs dat DK evenwijdig is aan EL .



Uitwerking. Merk op dat PK en QE allebei loodrecht op BE staan. Er geldt dus $QE \parallel PK$. Met Z-hoeken zien we nu dat $\angle EQH = \angle HPK$. Omdat er ook geldt dat $\angle QHE = \angle PHK$ (overstaande hoeken) volgt er met (hh) dat $\triangle QHE \sim \triangle PHK$. Op dezelfde manier zien we dat $\triangle QHL \sim \triangle PHD$. Uit de eerste gelijkvormigheid volgt dat $\frac{|HE|}{|HK|} = \frac{|HQ|}{|HP|}$. Uit de tweede gelijkvormigheid volgt dat $\frac{|HL|}{|HD|} = \frac{|HQ|}{|HP|}$. Als we deze twee gelijkheden combineren, zien we dat

$$\frac{|HE|}{|HK|} = \frac{|HQ|}{|HP|} = \frac{|HL|}{|HD|} \quad \text{oftewel} \quad \frac{|HE|}{|HL|} = \frac{|HK|}{|HD|}.$$

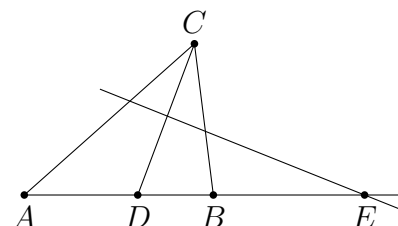
Omdat er ook geldt dat $\angle EHL = \angle KHD$ (overstaande hoeken) zien we nu dat $\triangle EHL \sim$

$\triangle KHD$ (zhz). Daaruit volgt dat $\angle LEH = \angle DKH$. Met Z-hoeken concluderen we nu dat $DK \parallel EL$. \square

Opgave 108 (Finale 2004). Twee cirkels A en B , beide met straal 1, raken elkaar uitwendig. Vier cirkels P , Q , R en S , alle ongelijk aan A en B , en alle vier met dezelfde straal r , liggen zo dat P uitwendig raakt aan A , B , Q en S ; Q uitwendig raakt aan P , B en R ; R uitwendig raakt aan A , B , Q en S ; en S uitwendig raakt aan P , A en R . Bereken de lengte van r .

Uitwerking. Noem de middelpunten van de cirkels A , P en S achtereenvolgens: M_1 , M_2 en M_3 . Verder is T het raakpunt van de cirkels A en B . Pythagoras levert in $\triangle M_2M_1T$ en $\triangle M_2M_3T$ voor M_2T : $|M_2T|^2 = |M_1M_2|^2 - |M_1T|^2$ en $|M_2T|^2 = |M_3M_2|^2 - |M_3T|^2$. Dus $(r+1)^2 - 1^2 = |M_1M_2|^2 - |M_1T|^2 = |M_3M_2|^2 - |M_3T|^2 = (r+r)^2 - (r+2)^2$. Dat levert de kwadratische vergelijking $r^2 - 3r - 2 = 0$. Met behulp van de abc-formule vind je de enige positieve oplossing $r = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. \square

Opgave 109 (Finale 2022). In de driehoek ABC ligt het punt D op lijnstuk AB zo dat CD de bissectrice is van hoek C . De middelloodlijn van lijnstuk CD snijdt het verlengde van AB in E . Veronderstel dat $|BE| = 4$ en $|AB| = 5$.



(a) Bewijs dat $\angle BAC = \angle BCE$.

(b) Bewijs dat $2|AD| = |ED|$.

Uitwerking.

(a) In de driehoek $\triangle ADC$ is de som van de hoeken 180° , dus

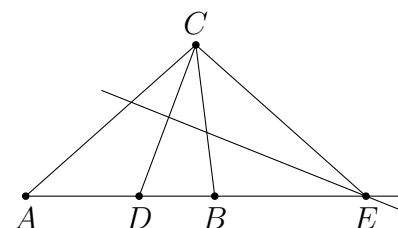
$$\angle BAC = \angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD.$$

Omdat CD de bissectrice is van hoek $\angle ACB$, is $\angle ACD = \angle DCB$ en dus is bovenstaande gelijkheid te herschrijven als

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle DCB.$$

Nu gebruiken we dat $\angle ADB$ een gestrekte hoek is, dus $\angle EDC = 180^\circ - \angle ADC$. Invullen geeft dat

$$\angle BAC = \angle EDC - \angle DCB.$$



Omdat E op de middelloodlijn van CD ligt, is $\angle EDC = \angle ECD$, dus de gelijkheid wordt

$$\angle BAC = \angle ECD - \angle DCB.$$

Tenslotte zien we in het plaatje dat $\angle ECD - \angle DCB = \angle BCE$, en dus is

$$\angle BAC = \angle BCE.$$

- (b) De driehoeken $\triangle ACE$ en $\triangle CBE$ zijn gelijkvormig, want $\angle AEC = \angle CEB$ (dezelfde hoek) en in onderdeel (a) bewezen we dat $\angle BAC = \angle BCE$ en dus $\angle CAE = \angle BCE$. Hieruit volgt dat

$$\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|CE|}{|BE|}.$$

Gegeven is dat $|BE| = 4$ en we berekenen dat

$$|AE| = |AB| + |BE| = 5 + 4 = 9.$$

Vullen we dat in in de verhoudingen hierboven, dan krijg je

$$\frac{9}{|CE|} = \frac{|CE|}{4},$$

dus $|CE|^2 = 36$ en $|CE| = 6$. Omdat de middelloodlijn van CD door E gaat, is $|CE| = |DE|$. Dat geeft

$$6 = |CE| = |DE| = |DB| + |BE| = |DB| + 4$$

en dus $|DB| = 2$. Hiermee concluderen we dat

$$|AD| = |AB| - |BD| = 5 - 2 = 3 \quad \text{en} \quad |ED| = 6.$$

We zien dat $2|AD| = 2 \cdot 3 = 6 = |ED|$.

□

Opgave 110 (Finale 2009). *Gegeven is een willekeurige driehoek ABC . Op de middelloodlijn van AB ligt een punt P , binnen driehoek ABC . Op zijden BC en CA worden uitwendig driehoeken BQC en CRA gezet zodanig, dat $\triangle BPA \sim \triangle BQC \sim \triangle CRA$. (Dus Q en A liggen aan weerszijden van BC , en R en B liggen aan weerszijden van AC .) Bewijs dat de punten P , Q , C en R een parallellogram vormen.*

Uitwerking. Merk op dat $|AP| = |PB|$ en dus ook $|BQ| = |QC|$ en $|CR| = |RA|$. Omdat $\triangle BPA \sim \triangle BQC$, geldt $\frac{|PB|}{|QB|} = \frac{|AB|}{|CB|}$. Verder geldt, omdat Q buiten en P binnen driehoek ABC ligt, dat

$$\angle QBP = \angle QBC + \angle CBP = \angle PBA + \angle CBP = \angle CBA,$$

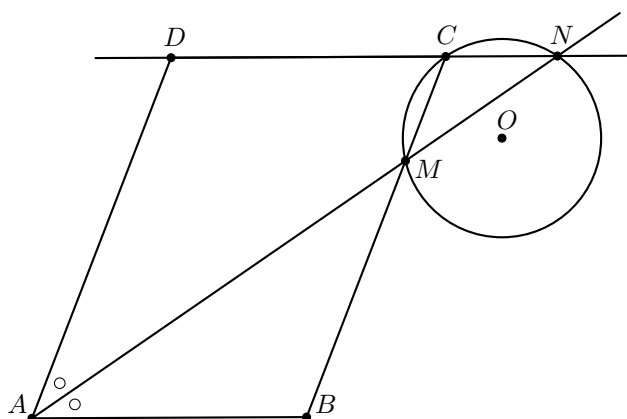
waaruit nu volgt dat $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ (zhz). Hierbij is $\triangle ABC$ een factor $\frac{|AB|}{|PB|}$ groter dan $\triangle PBQ$. Analoog is $\triangle ABC \sim \triangle APR$, waarbij $\triangle ABC$ een factor $\frac{|AB|}{|PA|}$ groter is dan $\triangle APR$. Omdat $|PA| = |PB|$ en dus $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|AB|}{|PB|}$, kunnen we nu concluderen dat $\triangle PBQ \cong \triangle APR$. Dus $|QP| = |RA| = |CR|$ en $|PR| = |BQ| = |QC|$.

De twee paren overstaande zijden van vierhoek $PQCR$ hebben dus gelijke lengte, waaruit volgt dat vierhoek $PQCR$ een parallellogram is. \square

Opgave 111 (Finale 2006). *Gegeven is een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$. De lengten van de hoogtelijnen uit A , B en C zijn achtereenvolgens h_A , h_B en h_C . Binnen de driehoek ligt een punt P . De afstand van P tot BC is $\frac{1}{3}h_A$ en de afstand van P tot AC is $\frac{1}{4}h_B$. Druk de afstand van P tot AB uit in h_C .*

Uitwerking. Noteer de oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$ met $[ABC]$. Dan geldt er uiteraard $[ABC] = \frac{1}{2}h_C \cdot |AB| = \frac{1}{2}h_A \cdot |BC| = \frac{1}{2}h_B \cdot |CA|$. Oftewel $|AB| = \frac{2[ABC]}{h_C}$, $|BC| = \frac{2[ABC]}{h_A}$ en $|CA| = \frac{2[ABC]}{h_B}$. Laat $\ell_A = \frac{1}{3}h_A$, $\ell_B = \frac{1}{4}h_B$ en ℓ_C de afstanden van P tot de zijden zijn. Dan geldt er $[ABC] = [ABP] + [BCP] + [CAP] = \frac{1}{2}\ell_C \cdot |AB| + \frac{1}{2}\ell_A \cdot |BC| + \frac{1}{2}\ell_B \cdot |CA| = \frac{1}{2}(\ell_C \frac{2[ABC]}{h_C} + \frac{1}{3}h_A \frac{2[ABC]}{h_A} + \frac{1}{4}h_B \frac{2[ABC]}{h_B}) = [ABC] \cdot (\frac{\ell_C}{h_C} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3})$. Dus $\frac{\ell_C}{h_C} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$. Oftewel $\ell_C = \frac{5}{12}h_C$. \square

Opgave 112 (Finale 2020). *Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $\angle A < 90^\circ$ en $|AB| < |BC|$. De bissectrice van hoek A snijdt zijde BC in M en het verlengde van zijde DC in N . Punt O is het middelpunt van de cirkel door M , C en N . Bewijs dat $\angle OBC = \angle ODC$.*



Uitwerking. Als tussenstap bewijzen we eerst dat driehoeken OCM en OCN congruent zijn. Omdat AD en BC evenwijdig zijn, geldt wegens F-hoeken dat $\angle CMN = \angle DAM = \frac{1}{2}\angle DAB$. Omdat DN en AB evenwijdig zijn, geldt vanwege Z-hoeken dat $\angle CNM =$

$\angle NAB = \frac{1}{2}\angle DAB$. De twee hoeken $\angle CMN$ en $\angle CNM$ zijn dus gelijk en driehoek CMN is daarom gelijkbenig met tophoek C . Hieruit volgt dat $|CM| = |CN|$. De lijnstukken OC , ON en OM zijn alle drie een straal van dezelfde cirkel en dus even lang. Driehoeken OCM en OCN zijn nu congruent met het ZZZ-criterium.

Om te bewijzen dat $\angle OBC = \angle ODC$, gaan we bewijzen dat driehoeken OBC en ODN congruent zijn. We gaan dit bewijzen met het ZHZ-criterium. We zullen bewijzen dat $\angle OND = \angle OCB$ en $|ON| = |OC|$ en $|DN| = |BC|$.

De gelijkheid $|ON| = |OC|$ volgt, omdat ON en OC allebei de straal zijn van dezelfde cirkel. In onderdeel (a) zagen we dat de driehoeken OCM en OCN congruent zijn. Bovendien zijn deze twee driehoeken gelijkbenig ($|OC| = |OM|$ en $|OC| = |ON|$), dus de vier basis-hoeken $\angle ONC$, $\angle OCN$, $\angle OMC$ en $\angle OCM$ zijn gelijk. We zien dus dat $\angle OND = \angle OCB$. We moeten alleen nog bewijzen dat $|DN| = |BC|$.

We merken op dat $\angle BMA = \angle DAM$ (wegens Z-hoeken) en $\angle DAM = \angle MAB$ (omdat AM de bissectrice van hoek A is). We zien dus dat $\angle BMA = \angle MAB$. Driehoek AMB is dus gelijkbenig en er geldt dat $|AB| = |BM|$. Verder hadden we al gezien dat $|CM| = |CN|$ en hebben we ook nog $|AB| = |CD|$, omdat $ABCD$ een parallellogram is. We vinden dus dat

$$|DN| = |CD| + |CN| = |AB| + |CM| = |BM| + |CM| = |BC|,$$

precies zoals we wilden bewijzen. □

Opgave 113 (Finale 2005). *Bekijk een trapezium $ABCD$ met AB evenwijdig aan CD en $|AB| > |CD|$. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in het punt S . Het verlengde van AD snijdt het verlengde van BC in het punt T . Bewijs dat de lijn door S en T door de middens van de zijden AB en CD gaat.*

Uitwerking. Noem de snijpunten van ST met AB en CD respectievelijk E en F . Vanwege de evenwijdigheid geldt op grond van (hh) dat $\triangle DFT \sim \triangle AET$ en $\triangle FCT \sim \triangle EBT$. Dus

$$\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|DF|/|FT|}{|FC|/|FT|} = \frac{|AE|/|ET|}{|EB|/|ET|} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

We zien echter nog meer gelijkvormigheden: ook $\triangle AES \sim \triangle CFS$ en $\triangle EBS \sim \triangle FDS$, dus

$$\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|DF|/|FS|}{|FC|/|FS|} = \frac{|BE|/|ES|}{|EA|/|ES|} = \frac{|BE|}{|EA|}.$$

Als we deze twee vergelijkingen combineren, krijgen we dat $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|BE|}{|EA|}$, dus $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{\left(\frac{|AE|}{|EB|}\right)}$, dus $\frac{|AE|}{|EB|} = 1$. Daarmee is bewezen dat E het midden is van lijnstuk AB , en met $\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|AE|}{|EB|} = 1$ vinden we dan ook dat F het midden is van lijnstuk DC . □

Opgave 114 (Finale 2004). Twee cirkels C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig in een punt P . Op C_1 ligt een punt Q zodanig dat de raaklijn in Q aan C_1 de cirkel C_2 snijdt in de punten A en B . De lijn QP snijdt C_2 nog in punt C . Bewijs dat driehoek $\triangle ABC$ gelijkbenig is.

Uitwerking. Laat M_1 het middelpunt van C_1 zijn en M_2 het middelpunt van C_2 . Punt P ligt op M_1M_2 . Noem R het midden van AB . Omdat driehoek $\triangle ABM_2$ gelijkbenig is met tophoek M_2 , is R ook het voetpunt van de hoogtelijn uit M_2 . Verder geldt $\angle QPM_1 = \angle CPM_2$. Omdat de driehoeken $\triangle PQM_1$ en $\triangle PCM_2$ gelijkbenig zijn met tophoeken respectievelijk M_1 en M_2 , geldt $\angle QPM_1 = \angle PQM_1$ en $\angle CPM_2 = \angle PCM_2$. Dus $\angle PQM_1 = \angle PCM_2$. Daaruit volgt met Z-hoeken dat $M_1Q \parallel M_2C$. Omdat M_1Q loodrecht staat op de raaklijn aan cirkel C_1 in Q , staat M_2C ook loodrecht op deze raaklijn, dus loodrecht op AB . Aangezien ook M_2R loodrecht op AB staat, moet M_2C wel door R gaan. Dus de loodlijn vanuit C op AB gaat door het midden van AB en daaruit volgt dat $\triangle ABC$ gelijkbenig is met tophoek C . (Als AB een middellijn van C_2 is, dan vallen R en M_2 samen. Het bewijs is in dat geval korter.) \square

Katern 4

Bewijsmethoden

14 Bewijs uit het ongerijmde

In katern 2 hebben we de volgende rekenregel bewezen, als onderdeel van rekenregel 4:

Als a een deler is van m , maar niet van n , dan is a geen deler van $m + n$.

We kijken even in wat meer detail naar het bewijs van deze bewering.

Bewijs. Neem een getal m dat deelbaar is door a en een getal n dat niet deelbaar is door a . We willen nu bewijzen dat a *niet* een deler is van hun som, die we even l noemen: $l = m + n$. Stel nu eens dat a juist *wel* een deler is van l , dan is het dus een deler van zowel l als m , en dus (wegens het eerste onderdeel van rekenregel 4) ook van het verschil $l - m$. Uit $l = m + n$ volgt bovendien dat $n = l - m$. Dus a is dan een deler van n . Maar we waren juist uitgegaan van een getal n dat niet deelbaar is door a . Kortom, de aanname dat a *wel* een deler is van l kan niet juist zijn en we concluderen dat a *niet* een deler is van l . \square

We wilden bewijzen dat a *niet* een deler is van l . We namen even aan dat het juist *wel* zo was. Daaruit leidden we af dat het getal n , dat gekozen was als een getal dat niet deelbaar is door a , toch deelbaar was door a . Dat is natuurlijk onmogelijk. Kortom, onze aanname was onjuist.

Deze manier van redeneren kunnen we algemener toepassen. We willen bewijzen dat een of andere bewering *niet* waar is. We nemen even aan dat de bewering juist *wel* waar is en laten vervolgens zien dat dat tot iets onmogelijks leidt; we komen uit op een *tegenspraak*. Je komt bijvoorbeeld uit op ' $5 < 4$ ', of op ' $3\frac{1}{3}$ is een geheel getal', of op ' $x^2 = -5$ ' (voor

x een reëel getal), of op ‘127 is even’. Stuk voor stuk uitspraken waarvan overduidelijk is dat ze niet waar zijn. Dan kunnen we daaruit concluderen dat de bewering inderdaad niet waar is.

Zo’n bewijs wordt een *bewijs uit het ongerijmde* genoemd. In plaats van direct te laten zien dat iets niet waar is, laten we zien dat het niet zo kan zijn dat het wel waar is!

Het is eigenlijk zo’n natuurlijke manier van redeneren, dat het je misschien niet eens opgevallen is dat we hem al wel eens vaker hebben toegepast. Hier een ander voorbeeld, letterlijk uit katern 2 (voorbeeld 10). Probeer te herkennen waar in de redenering de aanname wordt gemaakt die juist uiteindelijk moet worden ontkracht. En tot welke tegenspraak leidt deze aanname?

Laat a en b twee natuurlijke getallen zijn. Noem d de grootste gemene deler van a en b . Wat is nu $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$?

Bewijs. We schrijven $a = d \cdot e$ en $b = d \cdot f$, met $d = \text{ggd}(a, b)$. Als we e en f in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat p een priemdelers zou zijn van zowel e als f , dan zou $d \cdot p$ een deler zijn van $a = d \cdot e$ en ook van $b = d \cdot f$. Maar d is de grootste gemene deler van a en b en $d \cdot p$ is groter, dus dat kan niet. Kortom, e en f hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus $\text{ggd}(e, f) = 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. \square

Zoals we hierboven als zeiden: in plaats van direct te laten zien dat iets *niet* waar is, laten we dus zien dat het niet zo kan zijn dat het *wel* waar is. En zo zou je ook, in plaats van direct te laten zien dat iets *wel* waar is, kunnen laten zien dat het niet zo kan zijn dat het *niet* waar is.

In katern 1 heb je gezien dat als je een bewijs met inductie doet, het een goede gewoonte is om dat aan het begin van het bewijs ook aan te kondigen: “We gaan dit bewijzen met inductie naar n ”. Dan weet de lezer tenminste wat voor bewijsmethode je gaat gebruiken. Zo ook: als je een bewijs uit het ongerijmde gaat geven, laat de lezer dan even weten dat je deze methode gaat toepassen; dan snapt hij/zij tenminste waarom je zo’n rare aanname doet. Hieronder geven we twee voorbeelden van bewijzen uit het ongerijmde.

Voorbeeld 15. *Bewijs dat $\sqrt{5}$ geen rationaal getal is.*

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat $\sqrt{5}$ wel een rationaal getal is. Dan is $\sqrt{5}$ gelijk aan $\frac{t}{n}$ voor zekere gehele getallen t en n , waarbij $n \neq 0$. Dus dan is $5 = \frac{t^2}{n^2}$, oftewel $5n^2 = t^2$. We noemen dit laatste getal even N , dus $N = 5n^2$ maar ook $N = t^2$. Omdat $n \neq 0$ is $N = 5n^2$ een positief geheel

getal en heeft het een unieke priemfactorisatie. Kijk nu naar het aantal priemfactoren 5 in N . Volgens de uitdrukking $N = 5n^2$ heeft N een oneven aantal priemfactoren 5. Maar volgens de uitdrukking $N = t^2$ heeft N juist een even aantal priemfactoren 5. Dat is in tegenspraak met elkaar. De aanname dat $\sqrt{5}$ een breuk was, kan dus niet waar zijn. Dus $\sqrt{5}$ is geen breuk. \square

Voorbeeld 16. *Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.*

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Veronderstel dat er maar eindig veel priemgetallen zijn, zeg k . Dan kunnen we ze ook alle k opschrijven: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$. Kijk nu eens naar dit getal:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1.$$

Wegens die spelbreker '+1' kan dit getal niet deelbaar zijn door p_1 (omdat 1 niet deelbaar is door p_1 , dus wegens rekenregel 4). En ook niet door p_2 . En ook niet door p_3 . Et cetera. Toch moet dit getal een priemontbinding hebben. Dus moet N een priemfactor bevatten die nog niet in ons lijstje stond. Maar dat is een beetje vreemd: ons lijstje bestond immers uit *alle* priemgetallen. We kunnen niet anders dan concluderen dat onze eerste aanname onjuist was. Er zijn dus niet maar eindig veel priemgetallen; er zijn er oneindig veel! \square

Dit bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, stamt af van Euclides, een Grieks wiskundige uit de 3e eeuw voor Christus.

14.1 Opgaven

Opgave 115. *Van een geheel getal n is gegeven dat het niet deelbaar is door 3. Bewijs dat n ook niet deelbaar is door 123.*

Uitwerking. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat n wel deelbaar is door 123. Dan is er dus een gehele k zodat $n = 123k$. Maar $123 = 3 \cdot 41$, dus $n = 3 \cdot (41k)$. Dit betekent echter dat n deelbaar is door 3, terwijl juist gegeven was dat n niet deelbaar is door 3. Kortom: tegenspraak. We concluderen dat n juist niet deelbaar is door 123. \square

Opgave 116. *Geef alle reële oplossingen (x, y, z) van de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (en bewijs dat er geen andere oplossingen zijn).*

Uitwerking. Het is duidelijk dat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ een oplossing is. We beweren nu dat er geen andere oplossingen zijn. Dit bewijzen we uit het ongerijmde.

Stel dat er wel nog een andere oplossing is. Dat is dan een oplossing waarvoor niet x , y en z alle drie gelijk aan 0 zijn, dus bijvoorbeeld $x \neq 0$. Dan geldt $x^2 > 0$. Bovendien geldt $y^2 \geq 0$ en $z^2 \geq 0$, dus $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Maar dat is in tegenspraak met $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Een soortgelijke tegenspraak leiden we af als $y \neq 0$ of $z \neq 0$. Kortom, onze aanname dat er nog een andere oplossing is, kan niet juist zijn.

We concluderen dat er geen andere oplossing is, dus dat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ de enige oplossing is. \square

Opgave 117. *Op een conferentie zijn 99 mensen. Sommige mensen schudden elkaar de hand tijdens de conferentie. Aan het eind zegt iedereen met hoeveel mensen hij handen geschud heeft. Precies 9 mensen zeggen 10 anderen de hand geschud te hebben, precies 9 mensen zeggen 11 anderen de hand geschud te hebben, enzovoorts, en precies 9 mensen zeggen 20 mensen de hand geschud te hebben. Bewijs dat minstens één iemand zich vergist moet hebben.*

Uitwerking. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat iedereen gelijk heeft. Als we alle aantallen genoemd door de conferentiegangers optellen, krijgen we $9 \cdot (10 + 11 + \dots + 20) = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (10 + 20) = 9 \cdot 11 \cdot 15$. Echter, als twee mensen elkaar de hand schudden, tellen zij dit allebei mee. Daarom moet het totaal van alle genoemde aantallen even zijn. We hebben net berekend dat het juist oneven is (want oneven \cdot oneven \cdot oneven). Tegenspraak. Iemand moet zich dus wel vergist hebben. \square

Opgave 118. *Bewijs dat er geen natuurlijke getallen x en y zijn zodat $x^2 + 5x = 2y^4 + 1$.*

Uitwerking. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Veronderstel dat er wel een oplossing (x, y) is. Het rechterlid is dan duidelijk oneven. Het linkerlid is ofwel

$$\text{oneven} \cdot \text{oneven} + \text{oneven} \cdot \text{oneven} \quad \text{en dat is even}$$

ofwel

$$\text{even} \cdot \text{even} + \text{oneven} \cdot \text{even} \quad \text{en dat is ook even.}$$

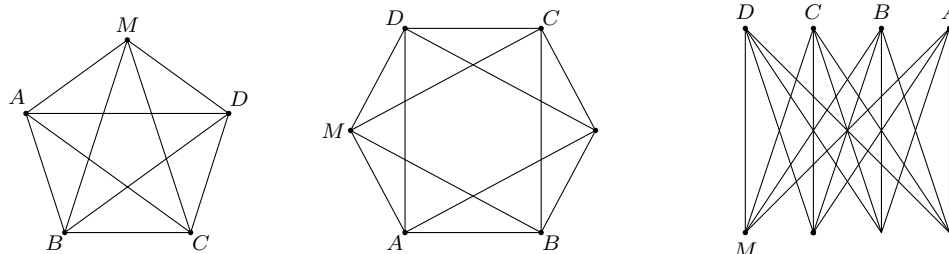
(Alternatief: het linkerlid is $x(x + 5)$ en nu is x even precies dan als $x + 5$ oneven is, dus het linkerlid is het product van een even en een oneven getal, dus even.) Dus dan zou iets evens gelijk zijn aan iets onevens. Dat is absurd. Dus onze aanname was onjuist en er zijn geen oplossingen. \square

Opgave 119 (Finale 2019). *Op een feestje zijn n gasten aanwezig. Voor elk tweetal gasten geldt dat ze óf met elkaar bevriend zijn, óf niet met elkaar bevriend zijn. Iedere gast is bevriend met precies vier andere gasten. Als een gast met twee andere gasten allebei niet bevriend is, is het altijd zo dat die gasten ook niet met elkaar bevriend zijn.*

Wat zijn de mogelijke waarden van n ?

Uitwerking. We kijken eerst naar de vrienden van één van de gasten, zeg Marieke. We weten dat Marieke precies vier vrienden heeft op het feest, zeg Aad, Bob, Carla en Demi. Met de andere gasten (als die er zijn) is Marieke niet bevriend. Die gasten kunnen onderling geen vriendschappen hebben, en kunnen dus alleen vrienden zijn met Aad, Bob, Carla en Demi. Omdat iedereen precies vier vrienden heeft op het feest, is elk van hen dus bevriend met Aad, Bob, Carla en Demi (en verder met niemand).

Omdat Aad zelf ook precies vier vrienden heeft (waaronder Marieke), bevat de groep mensen die geen vriend zijn van Marieke hooguit drie personen. Als die groep uit nul, één of drie mensen bestaat, dan hebben we de volgende oplossing (waarbij een lijn tussen twee mensen betekent dat ze vrienden zijn):



Oplossingen met vijf, zes en acht gasten in totaal.

Nu zullen we bewijzen dat het niet mogelijk is dat die groep uit twee mensen bestaat. In dit geval zou Aad nog precies één vriend hebben onder Bob, Carla en Demi; zeg dat Aad en Bob vrienden zijn. Op dezelfde manier moet Carla een vriend zijn met een van Aad, Bob en Demi. Omdat Aad en Bob al vier vrienden hebben, moeten Carla en Demi vrienden zijn van elkaar. Echter, omdat zij beiden geen vrienden zijn met Aad, is dat in tegenspraak met de eis in de opgave.

Op het feestje zijn dus vijf, zes of acht gasten aanwezig. De mogelijke waarden voor n zijn dus 5, 6 en 8. \square

Opgave 120 (Finale 2007). *Is het mogelijk om de verzameling $A = \{1, 2, 3, \dots, 32, 33\}$ op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo'n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.*

Uitwerking. We bewijzen dat zo'n verdeling niet mogelijk is; dit doen we uit het ongerijmde. Stel dat er zo'n verdeling in elf deelverzamelingen bestaat. Elke deelverzameling bestaat uit drie getallen, zeg a , b en c , die voldoen aan $a + b = c$ en bijgevolg ook aan $a + b + c = 2c$. Dus voor elke deelverzameling is de som van de getallen even. Maar dan

moet de som van alle getallen $1, 2, \dots, 32, 33$ ook even zijn.

Echter $1+2+3+\dots+33 = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (33+1) = 33 \cdot 17$ en dat is een oneven getal. Tegenspraak. Dus er bestaat geen verdeling van A met de gewenste eigenschappen. \square

Opgave 121. *Een even aantal mensen zit om een ronde tafel. Elk van hen is een ridder of een schurk. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. Aan elke persoon wordt de vraag gesteld: “Is je rechterbuurman een schurk?” Het blijkt dat de gegeven antwoorden om en om “Ja” en “Nee” zijn (dus elke persoon die “Ja” zegt heeft twee burens die “Nee” zeggen en andersom). Bewijs dat het aantal personen om de tafel een veelvoud van 4 is.*

Uitwerking. Stel dat er een ridder is die “Ja” zegt. Dan is zijn rechterbuurman een schurk. Die zegt “Nee”, maar liegt, dus zijn rechterbuurman is ook een schurk. Dus als we een ridder hebben die “Ja” zegt, dan zit twee plaatsen verderop een schurk die “Ja” zegt. Stel nu dat we juist een schurk hebben die “Ja” zegt. Hij liegt, dus zijn rechterbuurman is een ridder. Die zegt “Nee” een spreekt de waarheid, dus zijn rechterbuurman is ook weer een ridder. Dus als we een schurk hebben die “Ja” zegt, dan zit twee plaatsen verderop een ridder die “Ja” zegt. Al met al kunnen we concluderen dat op de plekken waar “Ja” gezegd wordt, om en om ridders en schurken zitten.

Nu gaan we verder uit het ongerijmde. Stel dat het aantal personen geen veelvoud van 4 is. Het is wel even (dat is gegeven in de opgave). Als we nu alleen de mensen bekijken die “Ja” zeggen, dan hebben we precies de helft. De helft van een even getal dat geen veelvoud van 4 is, is een oneven getal. We hebben dus een oneven aantal mensen die “Ja” zeggen. Maar dit zijn om en om ridders en schurken. Als we beginnen bij een ridder en dan om de tafel lopen (steeds van “Ja”-zegger naar “Ja”-zegger), dan hebben we na 1, 3, 5, ... stappen een schurk. Maar anderzijds zijn we na een oneven aantal stappen weer precies terug bij de eerste ridder. Tegenspraak. Het aantal personen moet dus wel een veelvoud van 4 zijn. \square

Opgave 122. *Stel dat a een natuurlijk getal is zodanig dat \sqrt{a} geen natuurlijk getal is. Bewijs dat \sqrt{a} ook geen breuk is.*

Uitwerking. Wegens de priemfactorisatie van natuurlijke getallen weten we dat een getal een kwadraat is precies dan als alle priemfactoren een even aantal keer voorkomen. Nu is gegeven dat a geen kwadraat is. Er is dan dus een priemfactor, zeg p , die een oneven aantal keer voorkomt. De rest van het bewijs gaat uit het ongerijmde, analoog aan voorbeeld 15. Veronderstel dat \sqrt{a} wel een rationaal getal is. Dan is \sqrt{a} gelijk aan $\frac{t}{n}$ voor zekere gehele getallen t en n . Dus dan geldt $a = \frac{t^2}{n^2}$, oftewel $a \cdot n^2 = t^2$. We noemen dit laatste getal even N , dus $N = a \cdot n^2$ maar ook $N = t^2$. Kijk nu naar het aantal priemfactoren p in N . Volgens de uitdrukking $N = a \cdot n^2$ heeft N een oneven aantal priemfactoren p . Maar volgens de uitdrukking $N = t^2$ heeft N juist een even aantal priemfactoren p . Dat is in tegenspraak met elkaar. De aanname dat \sqrt{a} een breuk was, kan dus niet waar zijn. Dus \sqrt{a} is geen breuk. \square

15 Handig tellen

We beginnen met een aantal voorbeeldjes van telproblemen.

Voorbeeld 17.

1. Drie objecten A , B en C kunnen we op 6 manieren op een rij zetten.
De mogelijkheden zijn namelijk: ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA .
2. Als we 10 objecten hebben, dan kunnen we op 10 manieren één van die 10 objecten kiezen.
3. We kunnen ook op 10 manieren 9 van de 10 objecten kiezen: we kiezen dan namelijk één van de 10 objecten juist niet en het uitkiezen van één object kon op 10 manieren.
4. We kunnen op 10 manieren 2 van de 5 objecten A , B , C , D en E kiezen (waarbij de volgorde er niet toe doet); we schrijven de mogelijkheden systematisch uit:
$$\begin{array}{cccc} \{A, B\}, & \{A, C\}, & \{A, D\}, & \{A, E\} \\ & \{B, C\}, & \{B, D\}, & \{B, E\} \\ & & \{C, D\}, & \{C, E\} \\ & & & \{D, E\} \end{array}$$
5. We kunnen op $3 + 2 = 5$ manieren 2 van de 3 objecten A , B en C of één van de 2 objecten D en E (maar niet allebei) kiezen: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{D\}$ en $\{E\}$.
6. We kunnen op $3 \cdot 2 = 6$ manieren 2 van de 3 objecten A, B en C en één van de 2 objecten D en E kiezen: $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$, $\{A, B, E\}$, $\{A, C, E\}$, $\{B, C, E\}$.

De laatste twee voorbeeldjes zijn voorbeelden van telproblemen met *of* en telproblemen met *en*. Hier kunnen we ook twee algemene regels voor formuleren:

- Het aantal mogelijkheden om X *of* Y (maar niet allebei) te doen is het aantal mogelijkheden om X te doen *plus* het aantal mogelijkheden om Y te doen.
- Het aantal mogelijkheden om X *en* Y te doen is het aantal mogelijkheden om X te doen *keer* het aantal mogelijkheden om Y te doen.

We kunnen dit samenvatten als: bij *of* moet je meestal optellen; bij *en* moet je meestal vermenigvuldigen. In dat laatste geval kun je alle mogelijkheden weergeven in een boomdiagram: eerst een vertakking voor elke mogelijkheid voor X , en vervolgens per mogelijkheid voor X nog alle mogelijkheden voor Y .

Dat we drie objecten A , B en C op 6 manieren op volgorde kunnen zetten, kunnen we ook als volgt inzien: voor het object op de eerste positie hebben we drie opties (A , B of C), voor het object op de tweede positie hebben we vervolgens nog maar twee opties over, en als we die hebben gekozen dan ligt het object op de derde positie vast. Dat levert (met de en-regel) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijkheden.

Op dezelfde manier kunnen we $n \geq 1$ verschillende objecten op $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ manieren in volgorde zetten: we hebben n keuzes voor het eerste object, dan $n - 1$ keuzes voor het tweede object, tot en met 1 keuze om het laatste object in de rij te kiezen.

Dit aantal noteren we met $n!$, uitspraak “ n -faculteit”:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

voor alle gehele $n \geq 1$. Verder definiëren we $0! = 1$; nul objecten kunnen we immers op 1 manier op een rij zetten (het lege rijtje).

(Aantal permutaties van n objecten) Je kunt n objecten op $n!$ manieren op volgorde zetten.

Als we slechts 3 van de n objecten op volgorde willen leggen (bijvoorbeeld een top 3 samenstellen), dan kan dat op $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ manieren: voor de eerste positie zijn er immers n mogelijkheden, voor de tweede positie vervolgens nog maar $n - 1$, en voor de derde plek nog maar $n - 2$ opties. Dit kunnen we ook schrijven als $\frac{n!}{(n-3)!}$; immers $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$. Algemener:

(Aantal variaties van k uit n) Om k objecten uit de n te kiezen, waarbij de volgorde van belang is maar herhaling niet is toegestaan, zijn er $\frac{n!}{(n-k)!}$ manieren.

We bekijken nu drie varianten hierop. Als herhaling wel is toegestaan in je keuzes voor de objecten, dan zijn er voor de tweede positie nog steeds weer n keuzes, en voor de derde positie ook, et cetera. Daarmee is het aantal keuzes van 3 objecten uit n waarbij de volgorde van belang is en herhaling is toegestaan, gelijk aan $n \cdot n \cdot n = n^3$. Algemener:

(Aantal herhalingsvariaties van k uit n) Om k objecten uit de n te kiezen, waarbij de volgorde van belang is en herhaling wel is toegestaan, zijn er n^k manieren.

Zo zijn er bijvoorbeeld 10^4 pincodes van 4 cijfers, terwijl er maar $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ pincodes bestaan waarvan alle cijfers verschillend zijn.

Een tweede variant komen we tegen als de volgorde er niet meer toe doet. Op hoeveel manieren kunnen we 3 objecten uit de n kiezen waarbij de volgorde van die objecten geen rol meer speelt (en herhaling niet is toegestaan)? Als de volgorde er wel toe zou doen, is het antwoord $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ oftewel $\frac{n!}{(n-3)!}$, zoals we hierboven zagen. Merk op dat er nu telkens $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ volgordes zijn die uit dezelfde objecten bestaan; zo zijn ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA de volgordes die corresponderen met de drie objecten $\{A, B, C\}$. Aangezien elke keuze van 3 objecten dus correspondeert met 6 volgordes van de $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ volgordes in totaal, is het totaal aantal keuzes van 3 objecten dus 6 keer zo klein: $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$. Wiskundigen hebben hier een speciale notatie en naam voor bedacht: $\binom{n}{3}$, uitgesproken als “ n boven 3”. Dit heet een binomiaalcoëfficiënt. Algemeen:

(Aantal combinaties van k uit n) Om k objecten uit de n te kiezen, waarbij de volgorde niet van belang is en herhaling niet is toegestaan, zijn er $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ manieren.

De laatste mogelijkheid, dat de volgorde niet van belang is maar herhaling wel is toegestaan, kom je tegen bij het beschilderen van paaseieren. Stel je wil 10 (identieke) eieren beschilderen met de kleuren Geel, Paars en Rood. Een mogelijkheid is bijvoorbeeld GGGRGGRPPP, wat we (omdat de volgorde er niet toe doet) ook kunnen noteren als GGGGGPPRRR, of als $5 + 3 + 2$. Dit komt dus neer op het aantal manieren waarop je 10 kunt schrijven als som van drie niet-negatieve gehele getallen (waarbij de volgorde er juist wel toe doet). Als we de eieren even expliciet erbij pakken ($00000 + 000 + 00$), dan zie je misschien al waarom het antwoord op deze vraag $\binom{12}{2} = 66$ is: van de 12 posities moeten we er 2 aanwijzen waar de plusjes komen; op de andere posities komen de 10 eieren.

(Aantal herhalingscombinaties van k uit n) Om k objecten uit de n te kiezen, waarbij de volgorde niet van belang is en herhaling wel is toegestaan, zijn er $\binom{k+(n-1)}{n-1}$ manieren.

We bekijken ten slotte nog een paar voorbeelden van ingewikkelder telproblemen. In opgave 123 ga je zelf met vergelijkbare voorbeelden aan de slag.

Voorbeeld 18.

1. Ik kan acht verschillende boeken op $8! = 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ manieren op een boekenplank zetten.
2. Uit mijn acht boeken kan ik op $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ manieren een top-3 samenstellen.
3. Uit mijn acht boeken kan ik op $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56$ manieren drie boeken kiezen om mee te nemen op vakantie.
4. Stel dat van mijn 8 boeken er drie hetzelfde zijn (en de overige vijf allemaal anders en onderling verschillend). Dan kan ik de boeken op $\frac{8!}{3!}$ manieren op mijn boekenplank zetten; van de $8!$ manieren (als het acht verschillende boeken zouden zijn), zijn er nu immers telkens $3!$ hetzelfde omdat er drie boeken hetzelfde zijn. Of bekijk het zo: zet eerst die vijf verschillende boeken in de kast; het eerste boek kan op 8 plekken, het volgende op 7 plekken, enzovoort, het vijfde boek kan op 4 plekken; de plekken voor de drie gelijke boeken liggen dan vast. Dit kan op $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!} = 6720$ manieren.
5. Stel dat mijn 8 boeken bestaan uit twee dezelfde thrillers, drie dezelfde romans en drie dezelfde gedichtenbundels. Dan kan ik de boeken op $\frac{8!}{2!3!3!}$ manieren op mijn boekenplank zetten, want er zijn telkens $2!3!3!$ manieren hetzelfde. Een andere manier om dit te benaderen: kies eerst 2 plekken van de 8 voor de thrillers, en vervolgens 3 plekken uit de overige 6 voor de romans (de plekken voor de gedichtenbundels liggen dan vast); dit kan op $\binom{8}{2} \binom{6}{3} = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = \frac{8!}{2!3!3!} = 560$ manieren.
6. Stel ten slotte dat ik twee keer per jaar op vakantie ga, en ik mijn acht verschillende boeken in twee groepjes van vier boeken wil verdelen, waarbij de volgorde binnen de groepjes niet uitmaakt en het ook niet uitmaakt welk groepje ik meeneem naar welke

vakantie. Er zijn $4!$ mogelijke volgordes binnen elk groepje, en $2!$ mogelijke volgordes van de groepjes. Er zijn dus telkens $4!4!2!$ mogelijkheden hetzelfde, dus er zijn $\frac{8!}{4!4!2!}$ manieren om de boeken te verdelen. Een andere manier: ik kies 4 boeken uit 8 boeken waarbij de volgorde niet uit maakt, maar als ik precies de andere 4 boeken kies krijg ik dezelfde groepjes. Dus er zijn $\frac{1}{2} \cdot \binom{8}{4} = 35$ mogelijkheden.

Bij sommige telproblemen is de vraag alleen om aan te tonen dat twee aantallen hetzelfde zijn. Soms kun je dit bewijzen zonder die aantallen expliciet te berekenen, maar door een 1-op-1-koppeling aan te brengen tussen de mogelijkheden. Maak dan heel duidelijk hoe je de koppeling tussen de beide verzamelingen mogelijkheden tot stand brengt. Zo'n 1-op-1-koppeling hebben we in feite hierboven ook gebruikt bij het beschilderen van de paaseieren, en in het volgende voorbeeld gebeurt dit ook.

Voorbeeld 19. *Op het punt $(0, 0)$ van een rooster zit een mier. De mier wil over roosterlijnen naar het punt $(9, 7)$ lopen. Daarbij wil hij een kortste route nemen, dat wil zeggen een route bestaande uit precies 16 roosterlijntjes. Hoeveel mogelijke routes zijn er?*

Oplossing. De mier moet steeds naar rechts of omhoog. Elke route kunnen we beschrijven door middel van een rijtje letters: 9 keer de letter R en 7 keer de letter O, bijvoorbeeld RRROORORRRORROOO. Bij elke route hoort zo'n rijtje, en bij elk zo'n rijtje hoort precies één route. Dit zijn 16 letters, die we in principe op $16!$ manieren op volgorde kunnen zetten als ze allemaal verschillend waren geweest. Maar er zijn er 9 en nog eens 7 hetzelfde, dus het antwoord is $\frac{16!}{9!7!} = 11440$. (Anders uitgelegd: van de 16 posities moeten we er 9 aanwijzen waar de R komt, en de volgorde waarin we die posities aanwijzen doet er niet toe. Dus er zijn $\binom{16}{9}$ mogelijkheden.) \square

15.1 Opgaven

Opgave 123. *Ik geef een verjaardagsfeestje met 15 mensen (14 gasten en mijzelf).*

1. *Ik heb 15 stoelen op een rij klaargezet. Op hoeveel manieren kunnen de 15 mensen op de stoelen gaan zitten?*
2. *Er zijn 8 stukken appeltaart, 5 stukken kwarktaart en 2 stukken hazelnoottaart. Op hoeveel manieren kan de taart verdeeld worden over de 15 mensen?*
3. *Ik houd niet van hazelnoottaart. Op hoeveel manieren kan de taart verdeeld worden zodat ik geen hazelnoottaart krijg?*
4. *Alle taartbordjes moeten ook weer afgewassen worden. Op hoeveel manieren kan ik een afwasgroepje bestaande uit een afwasser en twee afdrogers aanwijzen (ikzelf hoef natuurlijk als jarige niet af te wassen of af te drogen)? Hierbij maakt het uit wie er afwasser is en wie de afdrogers.*

Uitwerking.

1. $15!$.
2. Een rijtje zoals AAAAAAAAKKKKKHH staat voor een taartverdeling (de eerste persoon krijgt de eerstgenoemde taart, et cetera). Er zijn $\frac{15!}{8!5!2!}$ van zulke rijtjes.
3. Als ik appeltaart krijg, zijn er $\frac{14!}{7!5!2!}$ mogelijkheden en als ik kwarktaart krijg $\frac{14!}{8!4!2!}$, dus totaal zijn er $\frac{14!}{7!5!2!} + \frac{14!}{8!4!2!}$ mogelijkheden. Alternatief: als ik hazelnoottaart krijg, zijn er $\frac{14!}{8!5!1!}$ mogelijkheden, dus als ik geen hazelnoottaart krijg, zijn er $\frac{15!}{8!5!2!} - \frac{14!}{8!5!1!}$ mogelijkheden. Beide antwoorden zijn ook te schrijven als $\frac{13 \cdot 14!}{8!5!2!}$.
Tweede alternatief: $\binom{14}{2} \binom{13}{8}$.
4. Voor de afwasser zijn 14 mogelijkheden en daarna voor de twee afdrogers $\frac{13 \cdot 12}{2}$ mogelijkheden. Dus totaal $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{2}$ mogelijkheden. Alternatief: voor het afwasgroepje zijn $\binom{14}{3}$ mogelijkheden, waarbinnen er drie mogelijke afwassers zijn, dus $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2} \cdot 3$ mogelijkheden.

□

Opgave 124. *Hoeveel diagonalen heeft een convexe n -hoek ($n \geq 3$ geheel)? (Een diagonaal van een n -hoek is een lijnstuk tussen twee hoekpunten dat geen zijde is. Een convexe veelhoek is een veelhoek waarbij alle diagonalen geheel binnen de veelhoek liggen.)*

Uitwerking. Elk punt kunnen we koppelen aan $n - 3$ andere punten om een diagonaal te krijgen. Hierbij tellen we elke diagonaal twee keer. Dus het antwoord is $\frac{n(n-3)}{2}$. Alternatief: elke twee verschillende hoekpunten worden verbonden door een diagonaal of een zijde. Er zijn n zijden, dus het antwoord is $\binom{n}{2} - n$. □

Opgave 125. *Hoeveel rijtjes van drie verschillende gehele getallen (a, b, c) zijn er met $1 \leq a, b, c \leq 100$, zodat b de grootste van de drie getallen is?*

Uitwerking. Er zijn $\binom{100}{3}$ verzamelingen van drie getallen uit $\{1, 2, \dots, 100\}$. Voor elk van die verzamelingen hebben we 2 mogelijke rijtjes, want b moet de grootste zijn maar we kunnen a en c omwisselen. Het antwoord is dus $2 \cdot \binom{100}{3}$. □

Opgave 126. *Aan een tennistoernooi doen $2n$ spelers mee ($n \geq 1$ geheel). Elke speler speelt in de eerste ronde een wedstrijd tegen een andere speler. Op hoeveel manieren kunnen de spelers over deze n wedstrijden verdeeld worden?*

Uitwerking. Kies één voor één de paren spelers. Dat kan op $\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{2}{2}$ manieren. De volgorde van de paren maakt niet uit, dus we moeten nog delen door $n!$. Er vallen heel

veel factoren weg en we komen uit op $\frac{(2n)!}{2^n n!}$. Alternatief: geef alle spelers een nummer van 1 t/m $2n$ (dat kan op $(2n)!$ manieren) en koppel dan nummer 1 en 2, nummer 3 en 4, etc. Binnen elk paar maakt de volgorde niet uit en de volgorde van de n paren maakt ook niet uit, dus we moeten nog delen door 2^n en door $n!$. Dit is ook gelijk aan $\prod_{i=1}^n (2i - 1)$. \square

Opgave 127 (Tweede ronde 2023). *Sara heeft 10 blokken genummerd 1 t/m 10. Ze wil alle blokken opstapelen tot een toren. Een blok mag alleen bovenop een blok met een hoger nummer, of op een blok met een nummer dat precies één lager is. Een voorbeeld is, van boven naar beneden: 2, 1, 5, 4, 3, 6, 7, 9, 8, 10.*

Hoeveel verschillende torens zijn mogelijk?

Uitwerking. *We gaan het probleem eerst bekijken voor een kleiner aantal blokken met opeenvolgende getallen. Met 1 blok is er maar 1 toren mogelijk. Met 2 blokken zijn zowel de torens (boven) 1-2 (onder) als 2-1 mogelijk. Met 3 blokken zijn dit de mogelijke torens: 1-2-3, 2-1-3, 1-3-2 en 3-2-1. Met 4 blokken zijn dit de mogelijke torens:*

$$\begin{array}{cccc} 1 - 2 - 3 - 4, & 1 - 2 - 4 - 3, & 2 - 1 - 3 - 4, & 2 - 1 - 4 - 3, \\ 1 - 3 - 2 - 4, & 1 - 4 - 3 - 2, & 3 - 2 - 1 - 4, & 4 - 3 - 2 - 1. \end{array}$$

Het lijkt erop dat het aantal torens telkens verdubbelt. We gaan dit bewijzen. Gegeven een toren van $n > 1$ blokken, bekijk het blok met het hoogste nummer, n . Als dit blok op een ander blok ligt, moet dat wel een blok met een lager nummer zijn (want er is geen blok met een hoger nummer), dus moet het volgens de voorwaarde wel op het blok met nummer $n - 1$ liggen. Blok n ligt dus ofwel onderop, danwel direct boven blok $n - 1$. Omdat alle andere blokken ook bovenop blok $n - 1$ kunnen liggen, zien we dat als we blok n weglaten, er een geldige toren met $n - 1$ blokken overblijft.

Nu willen we laten zien dat we uit een willekeurige (geldige) toren met $n - 1$ blokken ook weer een toren met n blokken kunnen maken. In elke willekeurige (geldige) toren met $n - 1$ blokken kunnen we blok n ofwel onderop invoegen danwel bovenop blok $n - 1$; andere plekken zijn niet mogelijk en op deze manier ligt blok n nooit op een blok met een te klein nummer. In beide gevallen wordt de toren van n blokken nu een geldige toren, omdat bovenop blok n elk ander blok kan liggen. Uit elke willekeurige geldige toren met $n - 1$ blokken ontstaan dus twee geldige torens met n blokken.

We zien dus dat het aantal torens inderdaad telkens verdubbelt. Voor $n = 1$ is er $1 = 2^0$ toren, voor $n = 2$ zijn er $2 = 2^1$ torens en in het algemeen zijn er 2^{n-1} torens. Het aantal torens met 10 blokken is dus $2^9 = 512$. \square

Opgave 128 (Finale 2023). *Een wiskundeleraar heeft 10 kaarten met daarop de getallen 1 tot en met 10, één getal per kaart. Ze legt deze kaarten in een of andere volgorde op een rij naast elkaar op tafel. Om de beurt komen nu de leerlingen naar de tafel. De leerling*

gaat één keer van links naar rechts door de rij kaarten en verwijdert elke kaart die ze tegenkomt die (op dat moment) de laagste kaart is die nog op de tafel ligt. Dit gaat door totdat alle kaarten van de tafel gepakt zijn. Ligt bijvoorbeeld de rij kaarten op volgorde 3, 1, 4, 5, 8, 6, 9, 10, 2, 7 van links naar rechts, dan pakt de eerste leerling de kaarten 1 en 2. Vervolgens komt de tweede leerling, die pakt in ons voorbeeld de kaarten 3, 4, 5, 6 en 7. De derde leerling pakt vervolgens de kaarten 8, 9 en 10.

Noem A het aantal volgordes van de kaarten in de stapel die de leraar kan kiezen zodat precies negen leerlingen aan de beurt komen om kaarten te pakken. Noem B het aantal volgordes van de kaarten in de stapel die de leraar kan kiezen zodat precies twee leerlingen aan de beurt komen om kaarten te pakken.

Bewijs dat $A = B$.

Uitwerking. Bekijk een rijtje kaarten waarbij precies negen leerlingen aan de beurt komen. Vervang nu alle kaarten k door $11 - k$. We zullen bewijzen dat dit een rijtje geeft waarbij precies twee leerlingen aan de beurt komen. We kunnen dit nog een keer doen en dan krijgen we het originele rijtje. Bekijk vervolgens een rijtje waarbij precies twee leerlingen aan de beurt komen en vervang weer alle kaarten k door $11 - k$. We zullen bewijzen dat dit een rijtje geeft waarbij precies negen leerlingen aan de beurt komen. Uit dit alles volgt dat $A = B$.

Stel dat er negen leerlingen aan de beurt komen. Dan hebben acht leerlingen elk één kaart gepakt, en één leerling pakt twee kaarten. Die twee kaarten hebben opeenvolgende getallen. Er is dus een getal n tussen 1 en 9 zodat het volgende geldt.

- De eerste leerling pakt alleen kaart 1,
- de tweede leerling pakt alleen kaart 2,
- ... ,
- de n -de leerling pakt kaarten n en $n + 1$,
- de $(n + 1)$ -de leerling pakt alleen kaart $n + 2$,
- ...
- en de negende leerling pakt alleen kaart 10.

Elk tweetal opeenvolgende kaarten moet dus in omgekeerde volgorde liggen, behalve de kaarten n en $n + 1$. Dit betekent dat de kaarten met $1, \dots, n$ in omgekeerde volgorde liggen, de kaarten n en $n + 1$ in de goede volgorde, en de kaarten $n + 1, \dots, 10$ in omgekeerde volgorde. (Het tweetal opeenvolgende kaarten $a, a + 1$ ligt in de goede volgorde als a links van $a + 1$ ligt, en in de omgekeerde volgorde als a juist rechts van $a + 1$ ligt.) We gaan nu overal kaart k vervangen door kaart $11 - k$. Als twee kaarten eerst in de goede volgorde lagen, dan liggen ze daarna in omgekeerde volgorde; en als twee kaarten eerst in omgekeerde volgorde lagen, dan liggen ze nu in de goede volgorde. We vinden dus dat de kaarten $1, \dots, 11 - n - 1$ in de goede volgorde liggen, de kaarten $11 - n - 1$ en $11 - n$ in

omgekeerde volgorde, en de kaarten $11 - n, \dots, 10$ in de goede volgorde. Dan moeten de leerlingen als volgt kaarten pakken:

- De eerste leerling pakt kaarten $1, \dots, 11 - n - 1$,
- De tweede leerling pakt kaarten $11 - n, \dots, 10$.

Er komen dus precies twee leerlingen aan de beurt. Hiermee hebben we laten zien dat als je in een rijtje waarbij precies negen studenten aan de beurt komen, alle getallen k door $11 - k$ vervangt, dan krijg je een rijtje waarbij precies twee studenten aan de beurt komen.

De omkering van deze bewering moeten we ook bewijzen, en dat gaat op eenzelfde manier. Stel dat er twee leerlingen aan de beurt komen. Dan is er een getal n tussen 1 en 9 zodat geldt dat de kaarten $1, \dots, n$ in de goede volgorde liggen (deze worden gepakt door de eerste leerling), de kaarten n en $n + 1$ in omgekeerde volgorde, en de kaarten $n + 1, \dots, 10$ in de goede volgorde (deze worden gepakt door de tweede leerling). We gaan nu wederom overal kaart k vervangen door kaart $11 - k$. Dan krijgen we een rijtje waarbij de kaarten $1, \dots, 11 - n - 1$ in omgekeerde volgorde liggen, de kaarten $11 - n - 1$ en $11 - n$ in goede volgorde, en de kaarten $11 - n, \dots, 10$ in omgekeerde volgorde. We zagen al dat bij zo'n rijtje negen leerlingen aan de beurt komen. Hiermee hebben we laten zien dat als je in een rijtje waarbij precies twee studenten aan de beurt komen, alle getallen k door $11 - k$ vervangt, dan krijg je een rijtje waarbij precies negen studenten aan de beurt komen.

We concluderen dat voor iedere volgorde van de kaarten waarbij precies negen leerlingen aan de beurt komen, er een volgorde is waarbij precies twee leerlingen aan de beurt komen, en andersom. Hieruit volgt dat $A = B$. \square

16 Ladenprincipe

Als je 7 knikkers in 6 laatjes doet, dan weet je zeker dat er ten minste 1 laatje is met ten minste 2 knikkers erin. We kunnen dat bewijzen uit het ongerijmde: zou namelijk elk laatje ten hoogste maar 1 knikker bevatten, dan zouden er in totaal maar ten hoogste 6 knikkers in gezeten hebben; tegenspraak. Dit principe blijkt soms heel handig van pas te komen. We noemen het het *ladenprincipe*. Om het goed te kunnen toepassen, moet je meestal op een slimme manier de knikkers en de laatjes kiezen. We bekijken twee voorbeelden.

Voorbeeld 20. *Iemand heeft zes verschillende willekeurige getallen tussen de 1 en de 10 opgeschreven (waarbij 1 en 10 ook mogen). Bewijs dat hij twee buurgetallen heeft opgeschreven. (Buurgetallen zijn getallen die 1 verschillen.)*

Oplossing. We maken laden met de labels (stickers) $\{2k - 1, 2k\}$ ($k = 1, \dots, 5$), oftewel

$$\{1, 2\} \quad \{3, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \{7, 8\} \quad \{9, 10\}.$$

Als knikkers kiezen we de opgeschreven getallen. We stoppen elk opgeschreven getal in de lade waar dat getal op het label staan. Aangezien er maar vijf laden zijn en we daar zes getallen (knikkers) over verdelen, moet er wegens het ladenprincipe na afloop ten minste één lade zijn met meer dan één getal. Dat moeten dan wel twee getallen zijn van de vorm $2k - 1$ en $2k$ en dat zijn duidelijk buurgetallen. \square

Voorbeeld 21. *In een zaal zit een groep van 20 mensen. Elke persoon in de groep moet op een briefje drie verschillende positieve gehele getallen schrijven, kleiner dan 10. Vervolgens moet iedereen de som van het drietal getallen bepalen. Bewijs dat er minstens twee mensen in deze groep zijn die precies dezelfde som als resultaat hebben.*

Oplossing. De laagst mogelijke som is $1 + 2 + 3 = 6$; de hoogste mogelijke $7 + 8 + 9 = 24$. De mogelijke uitkomsten voor de som zijn dus $6, 7, 8, \dots, 23, 24$ en als we goed tellen zien we dat dat $24 - 6 + 1 = 19$ verschillende waarden zijn. Neem dit nu als laatjes. We zien de mensen nu als de knikkers en stoppen ze in een bepaald laatje afhankelijk van de som van hun getallen. Omdat we nu 20 mensen (knikkers) verdelen over 19 laatjes, moet wegens het ladenprincipe minstens één laatje dubbel bezet zijn. Oftewel: er moet minstens één waarde zijn die bij twee (of meer) mensen de uitkomst was. \square

In dit voorbeeld hebben we laten zien dat een groep van 20 mensen groot genoeg is om altijd minstens twee keer dezelfde som als resultaat te hebben. Omdat de som 19 mogelijke waarden kan hebben, geldt er zelfs dat 20 de kleinste groep is waarvoor er altijd een som dubbel voorkomt.

Bij sommige opgaven wordt gevraagd om zelf te bepalen het kleinste of juist het grootste aantal te bepalen met een bepaalde eigenschap. Zo'n opgave bestaat uit eigenlijk uit twee delen: je moet niet alleen laten zien dat jouw antwoord de gevraagde eigenschap heeft, maar ook dat kleinere (of juist grotere) aantallen niet die eigenschap hebben.

Voorbeeld 22. *In een vaas zitten een heleboel rode, blauwe en groene ballen. Je trekt steeds een willekeurige bal uit de vaas. Hoeveel ballen moet je minimaal pakken om zeker te weten dat je vier ballen met dezelfde kleur hebt?*

Oplossing. We maken drie laden en stoppen alle ballen van dezelfde kleur samen in een lade. Als we tien ballen pakken, dan komen er minimaal vier uit hetzelfde laatje en hebben we dus zeker vier ballen met dezelfde kleur.

Om te laten zijn dat tien het minimale aantal is waarvoor dit geldt, moeten we ook nog laten zien dat het niet altijd voldoende is om negen ballen te pakken. Dat doen we door een voorbeeld te geven met negen ballen waarbij het niet goed gaat. Stel dat we eerst drie rode ballen trekken, daarna drie blauwe ballen en vervolgens drie groene ballen. Dan hebben we negen ballen getrokken zonder dat er vier dezelfde kleur hebben. Met negen ballen weten we dus niet zeker dat er vier dezelfde kleur hebben. \square

16.1 Opgaven

Opgave 129. *Amersfoort heeft 161.852 inwoners (1 januari 2024). Ieder mens heeft hooguit 100.000 haren op het hoofd. Bewijs dat er in Amersfoort zeker twee mensen zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.*

Uitwerking. Neem als laden $\{\text{de kale Amersfoorters}\}$, $\{\text{de Amersfoorters met 1 haar}\}$, \dots , $\{\text{de Amersfoorters met 100.000 haren}\}$. In deze 100.001 laden plaatsen we alle 161.852 Amersfoorters (knikkers) afhankelijk van het aantal haren dat ze op hun hoofd hebben. Omdat $161.852 > 100.001$, volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens 2 Amersfoorters erin. Deze twee mensen hebben dan evenveel haren. \square

Opgave 130. *Bewijs dat in een groepje van 15 mensen er altijd twee linkshandigen of twee rechtshandigen op dezelfde dag van de week jarig zijn (bijv. twee linkshandigen op dinsdag of twee rechtshandigen op zaterdag).*

Uitwerking. Neem 14 laden en wel één voor elke combinatie van weekdag en voorkeurs-hand:

$\{\text{maandag-links}\}$, $\{\text{maandag-rechts}\}$, $\{\text{dinsdag-links}\}$, \dots , $\{\text{zondag-rechts}\}$

Over deze 14 laden verdeel je 15 mensen (knikkers), afhankelijk van de weekdag waarop ze jarig zijn en hun voorkeurshand. Omdat $15 > 14$, volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens 2 mensen erin. Dat zijn dus twee mensen met dezelfde voorkeurshand die ook nog eens op dezelfde weekdag jarig zijn. \square

Alternatieve uitwerking. Maak eerst 2 laden: $\{\text{linkshandig}\}$ en $\{\text{rechtshandig}\}$. Als je hier 15 mensen over verdeelt, moet een van de twee laden ten minste 8 personen bezitten, anders zouden er in totaal maar hooguit $2 \cdot 7 = 14$ personen zijn geweest. Zeg dat de lade met linkshandigen ten minste 8 personen bezit. (Voor de lade met rechtshandigen gaat het verhaal analoog.) Pas nu het ladenprincipe toe op deze groep van ten minste 8 linkshandigen en met de 7 laatjes

$\{\text{maandag}\}$, $\{\text{dinsdag}\}$, \dots

Ten minste een laatje zal minstens dubbel worden gevuld en wel met twee linkshandigen die op dezelfde dag van de week jarig zijn. \square

Opgave 131. *Hoeveel torens kunnen er ten hoogste op een 8×8 -schaakbord staan zodanig dat geen enkele toren een andere toren kan slaan? Twee torens kunnen elkaar slaan als ze in dezelfde rij of dezelfde kolom staan en er geen andere toren tussen staat.*

Uitwerking. Het lukt in ieder geval met 8 torens: zet die allemaal maar op de diagonaal bijvoorbeeld. Dan staat elke toren op een andere rij en een andere kolom, dus dan kunnen die 8 torens elkaar niet slaan.

We gaan nu bewijzen dat als er 9 of meer torens zijn, er altijd minstens twee elkaar wel kunnen slaan. De vakjes van het schaakbord geven we coördinaten bestaande uit een letter en een cijfer. De letter geeft de kolom aan en het cijfer de rij. Linksonder heet A1 en rechtsboven heet H8. Maak laden met rijnummers 1, 2, 3, ..., 8. In deze 8 laden plaatsen we de 9 of meer torens (knikkers), afhankelijk van hun rijnummer. Omdat er meer dan 8 torens zijn, volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens twee torens erin. Misschien zitten er nog wel meer torens in die lade. Maar we hebben dan in elk geval een rij waar meer dan één toren staat. In deze rij staan dus ook zeker twee torens waar geen andere toren meer tussen staat (neem bijvoorbeeld de torens met de laagste kolomletters). Deze twee torens kunnen elkaar slaan. \square

Opgave 132. *Laat 51 verschillende gehele getallen gegeven zijn tussen de 1 en de 100 (waarbij 1 en 100 ook mogen).*

- (a) *Bewijs dat er een tweetal is met som 101.*
- (b) *Bewijs dat er een tweetal is met verschil 50.*
- (c) *Bewijs dat er een tweetal is waarvan de één deelbaar is door de ander.*

Uitwerking.

- (a) Neem als laden: $\{1, 100\}, \{2, 99\}, \dots, \{k, 101 - k\}, \dots, \{50, 51\}$. Dit zijn 50 laden en daarover verdelen we $51 > 50$ gegeven getallen (knikkers). Dus komen er wegens het ladenprincipe twee getallen bij elkaar in een laasje. Dat moeten dan wel de getallen k en $101 - k$ zijn (voor zekere k), want zo hadden we de labeltjes gekozen. Hun som is inderdaad 101.
- (b) Neem als laden: $\{1, 51\}, \{2, 52\}, \dots, \{k, 50 + k\}, \dots, \{50, 100\}$. Dit zijn 50 laden en daarover verdelen we $51 > 50$ gegeven getallen (knikkers). Dus komen er wegens het ladenprincipe twee getallen bij elkaar in een laasje. Dat moeten dan wel de getallen k en $50 + k$ zijn (voor zekere k), want zo hadden we de labeltjes gekozen. Hun verschil is inderdaad 50.
- (c) Neem als laden alle oneven getallen van 1 tot en met 99. Om te bepalen welk getal in welke lade komt, delen we dat getal zo vaak mogelijk door 2, totdat er een oneven getal overblijft; we stoppen het getal dan in de bijbehorende lade. Omdat we 50 laden hebben en 51 getallen, zitten er twee getallen in dezelfde lade. Deze twee getallen zijn allebei het product van hetzelfde oneven getal en een aantal (mogelijk 0) factoren 2. Het getal met het grootste aantal factoren 2 is dan deelbaar door het andere getal.

\square

Opgave 133. *In het vlak worden vijf roosterpunten paars gekleurd. (Een roosterpunt is een punt met gehele coördinaten.) Bewijs dat er twee paarse punten zijn zodat het lijnstuk tussen die twee punten ook door een roosterpunt (niet noodzakelijk een paars punt) heen gaat.*

Uitwerking. Maak laden met de opschriften (even, even), (even, oneven), (oneven, even) en (oneven, oneven). Stop de paarse punten in de laatjes afhankelijk van of hun eerste en tweede coördinaat even of oneven zijn. Omdat we vijf paarse punten hebben en vier laatjes, komen er twee paarse punten in hetzelfde laatje, zeg de punten met de coördinaten (a, b) en (c, d) . Het lijnstuk tussen deze twee punten gaat door het punt precies in het midden tussen de twee punten en dat is $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Omdat de twee paarse punten in hetzelfde laatje zitten, zijn a en c beide even of beide oneven en is $\frac{a+c}{2}$ daarom een geheel getal. Zo ook is $\frac{b+d}{2}$ een geheel getal. Dus dit punt is een roosterpunt. Het lijnstuk tussen de twee punten gaat dus inderdaad door een roosterpunt. \square

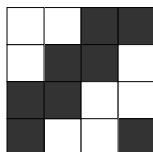
Opgave 134. *Laat 15 verschillende gehele getallen gegeven zijn tussen de 1 en de 100 (waarbij 1 en 100 ook mogen). Merlijn schrijft alle mogelijke paren op van twee getallen uit deze 15 (waarbij de twee getallen in een paar ook hetzelfde mogen zijn). Vervolgens berekent hij van elk paar de som van de twee getallen. Bewijs dat Merlijn hierbij minstens twee keer dezelfde uitkomst krijgt.*

Uitwerking. We moeten laten zien dat er binnen de 15 getallen vier getallen a, b, c en d te vinden zijn met $a + b = c + d$. Hierbij mogen gelijke getallen zitten, maar we mogen niet twee keer hetzelfde tweetal hebben, dus niet $a = c, b = d$ of $a = d, b = c$. We herschrijven $a + b = c + d$ naar $a - c = d - b$. We zoeken nu dus twee tweetallen (a, c) en (d, b) met hetzelfde verschil. Omdat we niet $a = c$ mogen hebben (want dan zou ook $b = d$) en net zo goed niet $b = d$ (want dan zou ook $a = c$), hoeven we het verschil 0 niet mee te nemen. We bekijken dus alle mogelijke paren van verschillende getallen en het positieve verschil van die twee getallen. Voor het eerste getal in zo'n paar zijn 15 mogelijkheden; voor het tweede getal nog 14. Maar dan tellen we alle paren twee keer, dus in feite zijn er $15 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 105$ paren mogelijk. De verschillen zijn minimaal 1 en maximaal $100 - 1 = 99$, dus er zijn 99 mogelijke verschillen. Met het ladenprincipe (99 laatjes, 105 knickers) zien we nu dat er een verschil is dat minstens twee keer voorkomt. We hebben dus getallen a, b, c en d met $a - c = d - b$. Omdat het gaat om twee verschillende paren, geldt nu automatisch $a \neq d$ (want als $a = d$, zou ook $b = c$ en zijn het twee dezelfde paren). We hebben nu dus de gevraagde getallen gevonden. \square

Opgave 135 (Finale 2013). *Van een tabel bestaande uit n bij n vierkantjes zijn sommige vierkantjes zwart en zijn de overige vierkantjes wit. Voor ieder tweetal kolommen en ieder tweetal rijen geldt dat de vier vierkantjes op de kruisingen van die rijen en kolommen niet allemaal dezelfde kleur hebben. (De rijen en kolommen hoeven niet tegen elkaar aan te*

liggen; je kunt dus bijvoorbeeld ook de bovenste en onderste rij van de tabel nemen.)
Wat is de grootst mogelijk waarde van n ?

Uitwerking. We zullen bewijzen dat $n = 4$ de grootst mogelijke n is waarvoor een $n \times n$ -tabel volgens de regels kan worden gekleurd. Dat $n = 4$ mogelijk is, zie je hier in de figuur.



We bewijzen nu uit het ongerijmde dat er geen kleuring van de vierkantjes in een 5×5 -tabel bestaat die aan de voorwaarde voldoet. Stel maar eens dat zo'n kleuring wel bestaat. Bekijk de eerste kolom. Daarin zijn vijf vakjes in twee verschillende kleuren, dus wegens het ladenprincipe is er een kleur die minstens drie keer voorkomt in deze kolom. Zeg dat dit zwart is. Bekijk de drie rijen waarin de eerste kolom een zwart vakje heeft (als het er meer dan drie zijn, bekijken we er willekeurig drie hiervan). Als een andere kolom in twee van die drie rijen ook zwarte vakjes heeft, wordt niet aan de voorwaarde in de opgave voldaan. Dus elke kolom heeft hooguit één zwart vakje in deze drie rijen en daarom minstens twee witte vakjes. Maak nu lades met als label steeds twee van de drie rijen erop; dat kan op drie manieren, dus er zijn drie lades. Stop een kolom in een lade als hij in beide rijen op het label een wit vakje heeft (als een kolom drie witte vakjes heeft, komt deze kolom in alle drie de lades terecht). Omdat er vier kolommen zijn en drie lades, is er een lade met minstens twee kolommen erin. Deze kolommen hebben dus in dezelfde twee rijen witte vakjes, in tegenspraak met de voorwaarde in de opgave.

Het is dus niet mogelijk om een 5×5 -tabel volgens de voorwaarden te kleuren. Het is dan ook onmogelijk om een $n \times n$ -tabel volgens de eisen te kleuren wanneer $n > 5$, dus de grootst mogelijke waarde is $n = 4$. \square

17 Extremenprincipe

De burgemeester van het dorpje Langeland wil een nieuwe wet invoeren: voortaan moet iedere inwoner de naam kennen van een medeburger die langer is dan hijzelf (of zijzelf). Om na te gaan of zijn wet uitvoerbaar is, stuurt de burgemeester een ambtenaar langs alle deuren. De ambtenaar moet van elke inwoner de lengte opschrijven om zo te achterhalen of er wel voor elk persoon een dorpsgenoot is die langer is.

Je begrijpt natuurlijk wel dat dit niet de meest efficiënte methode is. Het is direct duidelijk dat deze wet niet uitvoerbaar is, omdat er een langste inwoner van het dorp is. Je weet misschien niet wie de langste inwoner is, maar het is zeker dat er iemand is die minstens even lang is als al zijn dorpsgenoten. (Er kunnen trouwens best meerdere inwoners zijn die allemaal de langste zijn; dan kunnen ze allemaal geen naam noemen van een langere dorpsgenoot.)

Het idee van het extremenprincipe is om naar een extreem te kijken: een langste inwoner, een kleinste getal, een grootste verzameling, noem maar op. Ook al kun je zo'n extreem niet altijd expliciet aanwijzen, je weet vaak wel dat er eentje is.

Let op: niet in alle situaties weet je dat zo'n extreem bestaat! Er is bijvoorbeeld geen grootste natuurlijk getal. In andere woorden, als de inwoners van Langeland geen mensen maar natuurlijke getallen waren geweest, dan had de burgemeester zijn wet kunnen invoeren: elk natuurlijk getal n kan een getal noemen dat groter is, bijvoorbeeld $n + 1$.

Laten we eens kijken hoe we dit principe kunnen gebruiken in wiskundige bewijzen.

Voorbeeld 23. *De burgemeester van Langeland besluit zijn wet toch in te voeren. Bovendien laat hij elke dag elke burger ondervragen; als iemand geen naam kan noemen van een langere dorpsgenoot, wordt hij verbannen uit het dorp. Bewijs dat uiteindelijk alle burgers verbannen worden.*

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat *niet* alle burgers verbannen worden. Dan houdt het verbannen van burgers op een zeker moment op. Noem B de groep burgers die dan nog over is. Van deze burgers wordt dus niemand meer verbannen. Er behoren eindig veel burgers tot B (en minstens één, want niet iedereen wordt verbannen volgens onze aanname), dus er is een langste burger in deze groep. De eerstvolgende dag dat hij ondervraagd wordt, kan hij geen naam noemen van een langere dorpsgenoot, dus wordt hij verbannen. Dit is een tegenspraak met de aanname dat niemand uit B nog verbannen werd. We concluderen dat er helemaal niemand overblijft. \square

Hoewel het intuïtief direct duidelijk is dat alle burgers verbannen worden, is het best lastig om een bewijs op te schrijven dat echt waterdicht is. Het extremenprincipe helpt je hiermee. Zoals je ziet, wordt het bewijs met behulp van het extremenprincipe kort en is er geen speld tussen te krijgen. We bekijken nog een voorbeeld.

Voorbeeld 24. *Bij de finale van de Wiskunde Olympiade zijn 150 deelnemers. Elk van hen speelt een spelletje tegen precies twee andere deelnemers. Bewijs dat we een groep van 50 deelnemers kunnen vinden, zodat geen enkele tweetal binnen deze groep een spelletje tegen elkaar gespeeld heeft.*

Oplossing. Bekijk alle mogelijke groepen van deelnemers waarbinnen geen enkele tweetal een spelletje tegen elkaar gespeeld heeft. Neem nu de grootste groep hiervan en noem

deze A . (Er is een eindig aantal deelnemers en dus kunnen we een eindig aantal groepen vormen; daarom bestaat er een grootste groep.) We bewijzen deze opgave uit het ongerijmde, dus we nemen aan dat A minder dan 50 deelnemers bevat. De deelnemers in groep A hebben wel allemaal twee keer een spelletje gespeeld, samen dus hooguit 98 spelletjes. Er zijn dus hooguit 98 deelnemers buiten groep A die al een spelletje gespeeld hebben met iemand binnen groep A . Deze deelnemers samen met groep A zijn dus hooguit 147 mensen. Er zijn dus nog zeker 3 deelnemers die niet in groep A zitten, maar ook nog geen spelletje tegen iemand uit groep A gedaan hebben. Eén van deze deelnemers kunnen we dus toevoegen aan groep A , waarbij er nog steeds binnen groep A geen spelletjes gespeeld zijn. Maar nu is groep A groter geworden, wat een tegenspraak is met de aanname dat A de grootst mogelijke groep was. Dus er bestaat een groep van minstens 50 deelnemers. \square

Het is de kunst om een geschikt extreem te kiezen. In dit voorbeeld was het bijvoorbeeld niet zinvol om de deelnemer te kiezen die de meeste spelletjes gespeeld heeft (want ze hebben er allemaal precies twee gespeeld). Door de grootste groep zonder onderlinge spelletjes te kiezen, werkte het argument wel. De volgende opgaven kunnen allemaal opgelost worden met behulp van het extremenprincipe. Maar het is niet altijd makkelijk om een goed extreem te kiezen!

17.1 Opgaven

Opgave 136. *In het platte vlak zijn sommige punten rood gekleurd. Voor elk rood punt geldt dat het precies midden tussen twee andere rode punten ligt. Bewijs dat er oneindig veel rode punten zijn.*

Uitwerking. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat er maar eindig veel rode punten zijn. Dan bekijken we de rode punten die het meest links liggen in het vlak (als je een coördinatenstelsel hebt: de punten met de kleinste x -coördinaat). Als dit meerdere punten zijn, kiezen we het punt A daarvan dat ook nog het meest naar beneden ligt (kleinste y -coördinaat). Dit punt is het midden van twee andere rode punten B en C , maar deze mogen allebei niet verder naar links liggen dan A . Ze moeten dus wel allebei precies even ver naar links liggen als A . Echter, dan moet er eentje onder A liggen (en de ander erboven), terwijl A het onderste punt van de meest linkse punten was. Tegenspraak. Dus er zijn oneindig veel rode punten. \square

Opgave 137. *Twintig kinderen staan in een cirkel op zo'n manier dat de leeftijd van elk kind precies het gemiddelde is van de leeftijden van zijn twee burens. Bewijs dat alle kinderen even oud zijn.*

Uitwerking. Stel dat niet alle kinderen even oud zijn. Dan zijn er kinderen waarvan de beide burens niet precies even oud zijn als zichzelf. Bekijk nu de jongste van deze kinderen

en noem hem of haar even A . Omdat A het jongste kind is waarvan de buren niet even oud zijn, kunnen de buren van A niet jonger zijn dan A . De buren zijn niet allebei even oud als A , dus minimaal een van hen is ouder dan A (en de ander is minstens even oud als A). Maar dan is het gemiddelde van de twee leeftijden groter dan de leeftijd van A . Tegenspraak, dus alle kinderen zijn even oud. \square

Opgave 138. *Op een tafel liggen 4 vellen papier van verschillende vorm en grootte. Samen bedekken ze precies de hele tafel. Daarbij overlappen sommige stukken met elkaar en kunnen stukken papier ook uitsteken over de rand van de tafel. Je moet één stuk papier weghalen zodat nog ten minste driekwart van de oppervlakte van de tafel bedekt is. Lukt dat?*

Uitwerking. Zoek het vel papier dat zo min mogelijk kale tafel bedekt (dus stukken tafel die niet ook door een ander vel bedekt worden). Haal deze weg. Uit het ongerijmde kunnen we bewijzen dat nu nog ten minste driekwart van de tafel bedekt is. Als dit ene vel namelijk meer dan een kwart van de kale tafel zou bedekken, dan zou elk van de andere stukken dat ook doen en bedekken ze samen meer dan de hele tafel (nog afgezien van de overlappende stukken, die nu niet meegeteld worden). Tegenspraak. Dus het lukt. \square

Opgave 139. *Laat S een verzameling natuurlijke getallen zijn met de volgende eigenschappen:*

- *als een even getal $2n$ in S zit, dan zit n ook in S ,*
- *als een getal n in S zit, dan zit $n + 1$ ook in S ,*
- *het getal 2008 zit in S .*

Bewijs dat alle natuurlijke getallen in S zitten.

Uitwerking. We weten dat er minstens één getal in S zit, omdat 2008 er in elk geval in zit. Bekijk het kleinste getal a dat in S zit. We gaan bewijzen dat $a = 1$. Als a even zou zijn, dan zou ook $\frac{a}{2}$ in S zitten. Maar $\frac{a}{2} < a$, dus dan zou a niet het kleinste getal in S zijn. Tegenspraak. Dus a is oneven. Nu zit ook $a + 1$ in S en daarom ook $\frac{a+1}{2}$. Omdat a het kleinste getal in S is, moet wel gelden $\frac{a+1}{2} \geq a$. Dat kunnen we herschrijven tot $a + 1 \geq 2a$, dus $1 \geq a$. Omdat a een positief geheel getal is, volgt hieruit $a = 1$. Vanwege de tweede eigenschap van S zit nu ook 2 in S , en dus ook 3, en dus ook 4, etc. Conclusie: S bevat alle natuurlijke getallen. \square

Opgave 140. *Een eindig aantal steden is verbonden door een aantal éénrichtingsverkeerwegen. Voor elk tweetal steden X en Y is het mogelijk om via een aantal van deze wegen van X naar Y te komen of van Y naar X te komen. Bewijs dat er een stad is die vanuit elke andere stad bereikbaar is.*

Uitwerking. Tel voor elke stad het aantal andere steden waarvandaan deze stad bereikbaar is. Noem M het maximum van deze aantallen en laat A een stad zijn die vanuit M andere steden bereikbaar is. We gaan laten zien dat A vanuit alle andere steden bereikbaar is. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel er is nog een andere stad B waarvandaan A niet bereikbaar is. Dan is B wel vanuit A bereikbaar. Van elk van de M steden waarvandaan A bereikbaar is, kun je nu ook B bereiken: eerst naar A en vervolgens over de route van A naar B . (Geen van deze M steden is natuurlijk gelijk aan B , want vanuit B was A juist niet bereikbaar.) Ook vanuit A kun je B bereiken, dus B is te bereiken vanuit minstens $M + 1$ steden. Tegenspraak, want M was maximaal. Dus A is vanuit alle andere steden bereikbaar. \square

Opgave 141 (Finale 2021). *We bekijken een geheel getal $n > 1$ met de volgende eigenschap: voor iedere positieve deler d van n geldt dat $d + 1$ een deler is van $n + 1$. Bewijs dat n een priemgetal is.*

Uitwerking. Stel vanuit het ongerijmde dat n niet een priemgetal is. Bekijk nu de grootste deler $d < n$ van het getal n . Dan kunnen we n schrijven als de . Omdat n niet een priemgetal is, geldt $d > 1$ en dus ook $e < n$. Voor e moet nu gelden dat $e > 1$ en $e \leq d$ (want d is de grootste deler met $d < n$). Nu moet gelden dat $d + 1$ een deler is van $n + 1$. We zien ook dat $d + 1$ een deler is van $(d + 1)e = de + e = n + e$. Dat betekent dat $d + 1$ ook een deler moet zijn van het verschil $n + e - (n + 1) = e - 1$. Dat is echter onmogelijk want $e - 1$ is een getal dat tussen 1 en $d - 1$ ligt. We zien dat onze aanname dat n niet een priemgetal is onwaar moet zijn en dat n dus juist wel een priemgetal moet zijn. \square

Opgave 142 (Finale 2000). *Er staan vijftien spelers op een veld, elk met een bal. De afstanden tussen elk tweetal spelers zijn alle verschillend. Elke speler gooit de bal naar die speler die het dichtst bij hem staat. Bewijs dat er minstens één speler is naar wie geen bal gegooid wordt.*

Uitwerking. Bekijk alle afstanden tussen tweetallen spelers en kies de kleinste afstand. De twee spelers die op die afstand van elkaar staan, gooien hun bal naar elkaar. Laat nu deze twee spelers buiten beschouwing en bekijk alle afstanden tussen de andere dertien spelers. De twee spelers daarvan die de kleinste afstand tot elkaar hebben, gooien hun bal naar elkaar of naar één van de spelers die we buiten beschouwing hebben gelaten. In elk geval gooien ze hun bal niet naar de andere elf spelers. Nu laten we deze twee spelers weer buiten beschouwing en zo gaan we door. Op deze manier delen we veertien van de vijftien spelers op in paren die hun bal naar elkaar gooien of naar spelers uit eerder gekozen paren. Geen van deze veertien spelers gooit een bal naar de vijftiende speler, dus deze speler krijgt geen bal. \square

Opgave 143. *Op een 8×8 -schaakbord staat een aantal torens. Voor elk leeg vakje van het bord geldt: in dezelfde rij als het vakje en dezelfde kolom als het vakje staan samen minstens 8 torens. Laat zien dat er minstens 32 torens op het bord staan.*

Uitwerking. Tel van elke rij en elke kolom hoeveel torens erin staan. Zeg dat dit minimale aantal a is en dat dat voorkomt in rij i . Als $a \geq 4$, dan staan er blijkbaar in elke rij minstens 4 torens en dus in totaal minstens 32. Dan zijn we klaar. Stel nu dat $a \leq 3$. In rij i zijn $8 - a$ lege vakjes. Voor zo'n vakje geldt dat het aantal torens in dezelfde rij en dezelfde kolom samen minstens 8 is, waarvan er a in dezelfde rij staan. In de kolom van zo'n vakje staan dus minstens $8 - a$ torens. In deze $8 - a$ kolommen samen staan dus minstens $(8 - a)^2$ torens. Nu bekijken we de a vakjes in rij i waar wel een toren staat. In deze kolommen staan steeds minstens a torens (inclusief degene op rij i), want anders zou a niet het minimale aantal zijn. In totaal hebben we dus minstens $(8 - a)^2 + a^2 = 64 - 16a + 2a^2$ torens. We weten dat $a \leq 3$. Door nu $a = 0, 1, 2, 3$ in te vullen, zien we dat het aantal torens minstens 64, 50, 40, 34 is en dus altijd meer dan 32. Er staan dus in alle gevallen minstens 32 torens op het bord. \square

18 Gemengde opgaven

Opgave 144 (Finale 2020). *Daan verdeelt de getallen 1 tot en met 9 over de negen vakjes van een 3×3 -tabel (in elk vakje komt precies één getal). Vervolgens omcirkelt Daan in elke rij het middelste getal wat grootste betreft. Als bijvoorbeeld de getallen 8, 1 en 2 in een rij staan, dan omcirkelt hij dus het getal 2. Hij doet dat ook in elke kolom en op elk van de twee diagonalen. Als hij een getal al omcirkeld heeft, dan omcirkelt hij dat getal niet opnieuw.*

⑧	1	②
7	⑥	③
9	⑤	4

Het resultaat van dit proces noemt hij een mediaantabel. Hierboven zie je een voorbeeld van een mediaantabel waarin 5 getallen zijn omcirkeld.

- (a) *Wat is het **kleinst** mogelijke aantal omcirkelde getallen in een mediaantabel? Bewijs dat het niet minder kan zijn en geef een voorbeeld waarin dit minimale aantal omcirkeld wordt.*
- (b) *Wat is het **grootst** mogelijke aantal omcirkelde getallen in een mediaantabel? Bewijs dat het niet meer kan zijn en geef een voorbeeld waarin dit maximale aantal omcirkeld wordt.*

Uitwerking.

- (a) Het kleinst mogelijke aantal omcirkelde getallen is 3. Dat het niet met minder kan, volgt uit het feit dat er in elke rij minstens één getal wordt omcirkeld (en dit zijn

drie verschillende getallen).

Een mediaantabel waar maar 3 getallen zijn omcirkeld staat hiernaast. In de rijen worden de getallen 7, 5, 3 omcirkeld, in de kolommen de getallen 3, 5, 7 en op de diagonalen de getallen 5 en 5. Samen zijn dat drie verschillende getallen: 3, 5 en 7.

4	9	7
2	5	8
3	1	6

- (b) Het grootst mogelijke aantal omcirkelde getallen is 7. Dat het niet meer kan zijn, volgt uit het feit dat de getallen 9 en 1 nooit omcirkeld worden. Er worden dus nooit meer dan $9 - 2 = 7$ getallen omcirkeld.

Een mediaantabel waarbij daadwerkelijk 7 getallen worden omcirkeld staat hiernaast. In de rijen worden de getallen 2, 6, 8 omcirkeld, in de kolommen de getallen 7, 5, 3 en op de diagonalen 4 en 5. Samen zijn dat de zeven getallen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

4	1	2
7	5	6
8	9	3

□

Opgave 145 (Finale 2008). *Gegeven zijn 756 willekeurige verschillende gehele getallen tussen 1 en 2008 (waarbij 1 en 2008 ook mee mogen doen). Deze verzameling gekozen getallen noemen we S .*

Bewijs dat er twee verschillende gehele getallen a en b zijn in S waarvoor geldt dat $a + b$ deelbaar is door 8.

Uitwerking. We verdelen de getallen 1 tot en met 2008 over acht bakjes, genummerd V_1 tot en met V_8 , met in bakje V_i de 251 getallen van de vorm $8k + i$ met $0 \leq k \leq 250$:

$$V_1 = \{1, 9, \dots, 2001\}, \quad V_2 = \{2, 10, \dots, 2002\}, \quad \dots, \quad V_8 = \{8, 16, \dots, 2008\}.$$

De bakjes bevatten samen precies de getallen 1 tot en met 2008.

We bewijzen nu het gevraagde uit het ongerijmde. Stel dat er geen twee verschillende getallen a en b bestaan zodat $a + b$ deelbaar is door 8. We kijken wat dat betekent voor de verdeling van de getallen van S over de bakjes. Omdat de som van twee achtvouden deelbaar is door 8, zit er hoogstens één getal uit S in V_8 . Omdat de som van een achtvoud plus 4 en een achtvoud plus 4 deelbaar is door 8, zit er ten hoogste één getal uit S in V_4 . De som van een getal dat in bakje V_1 zit en een getal dat in bakje V_7 zit, is ook altijd deelbaar door 8, dus in minstens één van deze twee bakjes zitten geen getallen van S . Hetzelfde geldt voor minstens één van de bakjes V_2 en V_6 en voor minstens één van de bakjes V_3 en V_5 . In elk bakje zitten ten hoogste 251 getallen uit S , dus bevatten de bakjes $V_1, V_2, V_3, V_5, V_6, V_7$ samen ten hoogste $3 \cdot 251 = 753$ getallen uit S . De bakjes V_1 tot en met V_8 bevatten daarom ten hoogste 755 getallen uit S . Tegenspraak, want er zitten 756 getallen in S en elk getal moet ergens in een bakje zitten. □

Opgave 146. *Bewijs dat de vergelijking $x^3 + x + 1 = 0$ geen rationale oplossingen heeft.*

Uitwerking. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat de vergelijking $x^3 + x + 1$ wel rationale oplossingen heeft, zeg $x = \frac{t}{n}$ (met t en n geheel). Door de gemeenschappelijke factoren uit de teller en de noemer weg te delen, kunnen we de breuk zodanig vereenvoudigen dat $\text{ggd}(t, n) = 1$. We gaan er nu dus van uit dat we zo'n rationale oplossing $x = \frac{t}{n}$ hebben met t en n geheel en met $\text{ggd}(t, n) = 1$. Omdat $x = \frac{t}{n}$ een oplossing is, geldt $(\frac{t}{n})^3 + \frac{t}{n} + 1 = 0$. Door links en rechts met n^3 te vermenigvuldigen, komen we uit op

$$t^3 + tn^2 + n^3 = 0.$$

We bekijken nu het linkerlid $t^3 + tn^2 + n^3$ van deze vergelijking. Daarbij onderscheiden we, afhankelijk van de pariteit (even/oneven) van n en t , de volgende gevallen:

- t is even en n is oneven. Dan is het linkerlid even + even + oneven, dus oneven.
- t is oneven en n is even. Dan is het linkerlid oneven + even + even, dus oneven.
- t is oneven en n is oneven. Dan is het linkerlid oneven + oneven + oneven, dus oneven.
- t is even en n is even. Maar dit geval kan niet gebeuren, want dan zouden t en n een priemfactor 2 gemeenschappelijk hebben.

In alle drie de gevallen die kunnen gebeuren, zien we dat het linkerlid van de vergelijking $t^3 + tn^2 + n^3 = 0$ oneven is. Het rechterlid is echter 0, dus even. Dus iets wat oneven is, is gelijk aan iets wat even is; tegenspraak. Dus de aanname was onjuist zodat we kunnen concluderen dat de oorspronkelijke vergelijking $x^3 + x + 1$ geen rationale oplossingen heeft. \square

Opgave 147. *Bij een toernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar, waarbij er altijd een winnaar is. Aan het eind maakt elke deelnemer een lijst met daarop*

1. *de namen van alle deelnemers die hij verslagen heeft,*
2. *de namen van alle deelnemers die verslagen zijn door iemand die bij punt 1 genoemd is.*

De deelnemers schrijven geen namen dubbel op. Bewijs dat er een deelnemer is op wiens lijst alle andere namen voorkomen.

Uitwerking. Bekijk een deelnemer A met de langste lijst namen. We gaan bewijzen dat op zijn lijst alle andere namen voorkomen. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat er nog een deelnemer B is die niet voorkomt op de lijst van A . Dat betekent ten eerste dat B niet verslagen is door A (dus A is verslagen door B) en ten tweede dat B niet verslagen is door iemand die door A verslagen is (dus al deze deelnemers zijn door B verslagen). We zien dat zowel A als alle mensen die door A verslagen zijn, bij punt 1 op de lijst van B staan. Bovendien staan alle namen die A bij punt 2 had opgeschreven, ook bij B op de lijst. Immers, B heeft alle deelnemers verslagen die ook door A verslagen zijn. Kortom, alle deelnemers die bij A op de lijst staan, staan bij B ook op de lijst, maar

bovendien staat A ook op de lijst van B . Dus de lijst van B is langer dan die van A , tegenspraak. We concluderen dat A al alle andere namen op zijn lijst moet hebben. \square

Opgave 148 (Finale 2022). *Kira heeft 3 blokken met de letter A, 3 blokken met de letter B en 3 blokken met de letter C. Ze zet deze 9 blokken op een rij. Ze wil zoveel mogelijk verschillende onderlinge afstanden tussen blokken met dezelfde letter hebben. Bijvoorbeeld bij het rijtje ABCAABCBC hebben de blokken met letter A onderlinge afstanden 1, 3 en 4 van elkaar, de blokken met letter B onderlinge afstanden 2, 4 en 6 van elkaar, en de blokken met letter C ook onderlinge afstanden 2, 4 en 6 van elkaar. Alles bij elkaar komen dan de afstanden 1, 2, 3, 4 en 6 voor; dat zijn er 5.*

Wat is het maximale aantal verschillende afstanden dat kan voorkomen?

Uitwerking. We zullen laten zien dat er maximaal 7 verschillende afstanden voor kunnen komen. Eerst bewijzen we dat het aantal verschillende afstanden niet meer kan zijn dan 7, daarna laten we zien dat er een rijtje blokken is met 7 verschillende afstanden.

De mogelijke afstanden tussen twee blokken in een rij van negen blokken zijn 1 tot en met 8. Er kunnen dus zeker niet meer dan 8 verschillende afstanden voorkomen. We laten zien dat er altijd minstens één afstand is die niet voorkomt.

Als in een rijtje de afstanden 8 en 7 niet allebei voorkomen, dan zijn we klaar. Stel dus dat we een rijtje hebben waarin ze wel allebei voorkomen. Afstand 8 kan alleen voorkomen tussen het eerste en het laatste blok, dus die krijgen dezelfde letter, zeg A. Afstand 7 kan alleen voorkomen tussen ofwel het eerste en het achtste (voorlaatste) blok, ofwel tussen het tweede en het laatste blok. Omdat de beide buitenste blokken al A zijn, moet dus het tweede of het achtste blok ook A zijn. Het rijtje blokken is dus AxxxxxxA (of juist andersom: AxxxxxxAA), waarbij op de x'en de blokken B en C komen te staan. We zien nu dat afstand 6 niet meer voor kan komen: de afstanden tussen de A's zijn 1, 7 en 8, en de afstanden tussen de B's en C's onderling zijn niet hoger dan 5. Ook hier is er dus minstens één mogelijke afstand die niet voorkomt.

We concluderen dat er altijd één afstand van de mogelijke afstanden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 is die niet voorkomt. Het aantal verschillende afstanden kan dus niet meer zijn dan 7.

Een voorbeeld van een rijtje blokken waarin 7 verschillende afstanden voorkomen, is ABB-CACCBA, met onderlinge afstanden 4, 4, 8; 1, 5, 6; 1, 2, 3 (alleen afstand 7 ontbreekt). Dus het maximaal aantal verschillende afstanden dat kan voorkomen is gelijk aan 7. \square

Opgave 149 (Finale 1978). *Bewijs dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking*

$$3x^2 = 9 + y^3.$$

Uitwerking. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel dat er wel gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$. Dan moet y^3 wel deelbaar zijn door 3, dus y ook. We schrijven daarom $y = 3k$, zodat de vergelijking overgaat in $3x^2 = 9 + 3^3k^3$, oftewel $x^2 = 3 + 9k^3$. Maar dan moet x^2 en dus ook x wel deelbaar zijn door 3. We schrijven $x = 3l$ en komen uit op $9l^2 = 3 + 9k^3$, oftewel $3l^2 = 1 + 3k^3$. Dit is echter onmogelijk, want 1 is geen drievoud. We concluderen dat er dus niet x en y kunnen zijn met $3x^2 = 9 + y^3$. \square

Opgave 150 (Finale 2009). *Aan een tennistoernooi nemen minimaal drie spelers deel. Elke speler speelt precies één wedstrijd tegen elke andere speler en bovendien wint elke speler ten minste één wedstrijd van alle wedstrijden die hij speelt. (Er is bij een tenniswedstrijd altijd een winnaar en een verliezer, remise komt niet voor.)*
Bewijs dat er drie spelers A , B en C zijn waarvoor geldt: A wint van B , B wint van C en C wint van A .

Uitwerking. Kies een deelnemer A met de minste gewonnen wedstrijden en een deelnemer B waarvan A gewonnen heeft. Bekijk de verzameling X van deelnemers waarvan B gewonnen heeft. A zit niet in die verzameling X . Als er niet zo'n drietal is als gevraagd, dan heeft A van alle mensen in X gewonnen. Maar A had ook al van B gewonnen. Dus dan heeft A van minstens één persoon meer gewonnen dan B , tegenspraak. \square

Alternatieve uitwerking. We bewijzen eerst dat er een cykel is, dat wil zeggen m verschillende deelnemers A_1, \dots, A_m zodat A_1 won van A_2 , A_2 van A_3 , etc., tot en met A_m die weer won van A_1 . Begin maar met een willekeurige speler B_1 . Die heeft gewonnen van een andere speler B_2 , die op zijn beurt weer gewonnen heeft van een zekere B_3 . Zo kunnen we alsmaar door gaan. Omdat we maar eindig veel spelers hebben, zal op een gegeven moment een herhaling optreden: B_1 won van B_2 , B_2 van B_3 , \dots , B_u van B_{u+1} maar B_{u+1} is een speler die al eerder in de rij voorkwam, zeg $B_{u+1} = B_t$. Nu vormen B_t tot en met B_u inderdaad een cykel. Merk op dat de lengte m van een cykel altijd ten minste 3 is. In feite moeten we nu bewijzen dat er ook een cykel van lengte 3 is.

Omdat er in ieder geval een cykel is, kunnen we er ook een kiezen met kortst mogelijke lengte M , zeg C_1, \dots, C_M . Als $M > 3$, dan kijken we naar de onderlinge wedstrijd van C_1 en C_3 . Zou C_3 gewonnen hebben van C_1 ; dan hebben we een cykel van lengte 3 gevonden en dat is kleiner dan M ; tegenspraak. Zou C_1 juist gewonnen hebben van C_3 , dan hebben we een cykel van lengte $M - 1$ (door weglating van C_2), wat ook een kortere cykel is; ook dit geeft dus een tegenspraak. We concluderen dat $M = 3$ en C_1, C_2, C_3 vormt de gezochte cykel van lengte 3. \square

Alternatieve uitwerking met inductie. Noem het aantal spelers n . We gaan het probleem oplossen met inductie naar n . We bekijken eerst het geval $n = 3$. Omdat elk van de drie spelers minstens één wedstrijd heeft gewonnen, maar ze in totaal maar drie wedstrij-

den hebben gespeeld, heeft iedereen precies één wedstrijd gewonnen. In dit geval is het duidelijk dat de drie spelers een drietal vormen waarbij A won van B , B van C en C van A . Stel nu dat de bewering geldt voor willekeurige toernooien met $n = k$ spelers (waarin altijd elke speler minstens één wedstrijd wint) voor zekere $k \geq 3$. We bekijken nu het geval $n = k + 1$. Als er een speler is (zeg A) die precies één wedstrijd heeft gewonnen, dan is het duidelijk dat er zo'n drietal is. Noem namelijk B degene van wie A heeft gewonnen, dan heeft B op zijn beurt heeft weer van minstens één iemand anders gewonnen, zeg van (o.a.) C . Nu moet C wel van A gewonnen hebben, want A had niet van C gewonnen; hij had immers alleen van B gewonnen. Dus nu hebben we zo'n drietal. Als er niet iemand is die precies één wedstrijd heeft gewonnen, heeft iedereen er minstens twee gewonnen. Stuur nu één willekeurige deelnemer weg en doe net of die niet aan het toernooi heeft meegedaan. Daardoor gaat bij alle andere deelnemers het aantal gewonnen wedstrijden met 0 of 1 omlaag (afhankelijk van of ze van deze weggestuurde speler hadden verloren of gewonnen). Nog steeds heeft iedereen dus minstens één wedstrijd gewonnen en volgens de inductiehypothese vinden we nu in het toernooi met de overgebleven k personen een drietal als gevraagd. \square

Opgave 151 (Finale 1977). *Uit elk zevental positieve gehele getallen kan men een aantal (minstens één) kiezen waarvan de som een zevenvoud is. Bewijs dit.*

Uitwerking. Noem de zeven gegeven positieve gehele getallen x_1, \dots, x_7 . Bekijk $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3$, \dots , $s_7 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$. Als een van deze zeven getallen een zevenvoud is, dan ben je klaar. Zo niet, dan hebben ze allemaal een rest bij deling door 7. Die rest varieert van 1 tot en met 6; dat nemen we als laatjes. Daarover verdelen we de zeven getallen (knikkers) s_1 tot en met s_7 , afhankelijk van hun rest bij deling door 7. Van die zeven getallen zijn er wegens het ladenprincipe dus twee met dezelfde rest. In dat geval is het verschil van die twee getallen een zevenvoud en zijn we ook klaar. \square

Opgave 152 (Finale 2001). *Als je uit de gehele getallen 1 t/m 6003 een deelverzameling pakt van 4002 getallen, dan is er binnen die deelverzameling altijd weer een deelverzameling van 2001 getallen te vinden met de volgende eigenschap: als je de 2001 getallen ordent van klein naar groot, dan zijn de getallen afwisselend even en oneven (of oneven en even). Bewijs dit.*

Uitwerking. Verdeel de getallen in 3002 groepjes, namelijk de 3001 groepjes van twee getallen $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (6001, 6002)$ en één groepje met één getal (6003) . Als je uit deze 3002 groepjes er 1001 uitkiest dan heb je in totaal 2002 of 2001 getallen (2001 indien je het groepje (6003) bij de 1001 groepjes hebt gekozen). Als je de getallen uit de gekozen 1001 groepjes achter elkaar plaatst dan heb je een rij van 2002 (of 2001) getallen die afwisselend oneven, even, oneven, \dots zijn. Ze voldoen dan aan de gestelde eis. We laten zien dat je altijd 1001 groepjes kunt vinden binnen een deelverzameling van 4002 getallen.

Laat een willekeurige deelverzameling van 4002 getallen tussen de 1 en 6003 gegeven zijn. De 2001 getallen die niet in de deelverzameling zitten, strepen we door. Die 2001 getallen zitten in maximaal 2001 verschillende groepjes van de in totaal 3002 groepjes. Laat alle groepjes waarin minstens één doorgestreept getal zit buiten beschouwing, dan blijven er dus minimaal $3002 - 2001 = 1001$ groepjes over waarin geen getal is doorgestreept. Die 1001 groepjes leveren een rij van minstens 2001 getallen op die aan de gestelde eis voldoet. \square

Opgave 153 (Finale 2021). *We bekijken sporttoernooien waaraan $n \geq 4$ teams meedoen en waarbij elk tweetal teams hooguit eenmaal tegen elkaar speelt. We noemen zo'n toernooi evenwichtig als elk viertal teams onderling precies drie wedstrijden speelt. Niet alle teams spelen dus tegen elkaar.*

- (a) *Bewijs dat in een evenwichtig toernooi met $n \geq 5$ teams er geen drie teams te vinden zijn die allemaal tegen elkaar spelen.*
- (b) *Bepaal de grootste waarde van n waarvoor een evenwichtig toernooi met n teams bestaat.*

Uitwerking.

- (a) Stel vanuit het ongerijmde dat er in een evenwichtig toernooi wel drie teams te vinden zijn die allemaal tegen elkaar spelen, zeg teams A, B en C. Omdat $n \geq 5$, zijn er twee andere teams, zeg teams D en E. Omdat A, B en C onderling al drie wedstrijden spelen, kunnen er tussen de vier teams A, B, C en D geen andere wedstrijden meer gespeeld worden. Met andere woorden: team D speelt niet tegen teams A, B en C. Hetzelfde geldt voor team E. Als we nu kijken naar het viertal A, B, D en E, dan zien we dat er hooguit twee onderlinge wedstrijden zijn: A tegen B en eventueel D tegen E. Dat betekent dat er in dat viertal niet drie wedstrijden gespeeld zijn. Dat geeft een tegenspraak.
- (b) We gaan eerst laten zien dat het niet mogelijk is een evenwichtig toernooi te vinden met n teams voor $n \geq 6$. Daarna geven we een voorbeeld van een evenwichtig toernooi voor $n = 5$. Daarmee laten we zien dat 5 de grootste waarde voor n is waarvoor een evenwichtig toernooi met n teams mogelijk is.

Stel dat $n \geq 6$ en dat een evenwichtig toernooi met n teams wel bestaat. We kijken nu naar de eerste zes teams, teams A tot en met F. Stel dat A tegen hooguit twee van deze teams speelt, bijvoorbeeld hooguit tegen B en C maar niet tegen D, E en F. Het viertal A, D, E, F moet echter wel drie onderlinge wedstrijden spelen, dus D, E en F moeten tegen elkaar spelen. Dat is in tegenspraak met onderdeel (a).

We concluderen dat A tegen minstens drie van de teams moet spelen, bijvoorbeeld B, C en D. In het viertal A, B, C, D zijn nu drie wedstrijden gespeeld, dus B, C en D spelen geen onderlinge wedstrijden. Omdat het viertal B, C, D, E ook drie

wedstrijden moet spelen, moet E dus wel tegen elk van B, C en D spelen. Maar nu vinden we een tegenspraak in het viertal A, B, C, E: daar worden nu al minstens vier wedstrijden gespeeld (A tegen B, A tegen C, B tegen E en C tegen E). Een evenwichtig toernooi met $n \geq 6$ bestaat dus niet.

Om een toernooi met vijf teams te maken, stellen we ons voor dat de vijf teams in een cirkel staan. Twee teams spelen een wedstrijd tegen elkaar als ze naast elkaar staan in de cirkel. Als we dan vier teams bekijken, zien we dat er precies drie tweetallen zijn die naast elkaar staan in de cirkel. Er worden dus precies drie onderlinge wedstrijden gespeeld. We concluderen dus dat 5 de grootste waarde voor n is waarvoor er een evenwichtig toernooi bestaat.

□

Opgave 154 (Finale 2018). *In een quiz zijn er drie deuren. Achter één van de deuren ligt een prijs. Je mag de quizmaster vragen of de prijs achter de linkerdeur ligt. Je mag hem ook vragen of de prijs achter de rechterdeur ligt. Elk van deze twee vragen mag je meerdere keren stellen in een volgorde die je zelf kunt kiezen. Elke keer antwoordt de quizmaster met ‘ja’ of ‘nee’. In de hele serie van vragen mag hij maximaal 10 keer liegen. Je moet van tevoren zeggen hoeveel vragen je gaat stellen (maar welke vragen dat zijn, mag je laten afhangen van de antwoorden van de quizmaster).*

Wat is het kleinste aantal dat je kunt noemen om nog wel zeker te weten dat je na de serie vragen weet waar de prijs ligt?

Uitwerking. Het kleinste aantal vragen dat nodig is, is 32. Eerst zullen we een strategie laten zien om in 32 vragen achter de locatie van de prijs te komen. Aan het begin vraag je de quizmaster net zolang of de prijs achter de linkerdeur zit, totdat je het antwoord zeker weet. Je weet het antwoord pas 100% zeker als je 11 keer hetzelfde antwoord hebt gekregen. De quizmaster mag immers maximaal 10 keer liegen. Stel dat de quizmaster op dat moment n keer gelogen heeft. Dan heb je in totaal dus $11 + n$ keer een vraag gesteld en mag de quizmaster nog $10 - n$ keer liegen.

Daarna vraag je de quizmaster net zolang of de prijs achter de rechterdeur zit, totdat je het antwoord met 100% zekerheid weet. De quizmaster mag nog $10 - n$ keer liegen, dus er zijn hooguit $2(10 - n) + 1 = 20 - 2n + 1$ vragen nodig. In totaal heb je dan $32 - n$ vragen gesteld. Een strategie met 32 vragen is dus mogelijk.

Met maar 31 vragen is het niet altijd mogelijk om de locatie van de prijs te achterhalen. Hoe de quizmaster hiervoor kan zorgen laten we nu zien. In het begin, zolang je over beide deuren hoogstens tien vragen hebt gesteld, antwoordt hij elke keer met ‘nee’. Voor het gemak mogen we wel aannemen dat de eerste deur waar je elf keer een vraag over stelt, de linkerdeur is. We bekijken nu de situatie dat de prijs juist niet achter de linkerdeur zit (dat kan gebeuren). In dit geval laten we zien dat de quizmaster kan zorgen dat je na 31 vragen niet weet of de prijs achter de middelste deur of achter de rechterdeur ligt.

De quizmaster heeft tot nu toe over de linkerdeur steeds de waarheid gesproken en dat blijft hij doen: bij de linkerdeur zegt hij elke keer ‘nee’. Bij de rechterdeur blijft de quizmaster ‘nee’ zeggen tot en met de tiende vraag over deze deur. Daarna beantwoordt hij de volgende tien vragen over deze deur met ‘ja’. Omdat je in totaal hoogstens 20 vragen over de rechterdeur stelt (want je hebt al minstens 11 vragen over de linkerdeur gesteld), hoeft de quizmaster niet meer dan 10 keer te liegen. Of de prijs nu achter de middelste deur of achter de rechterdeur ligt, de quizmaster geeft in beide gevallen dezelfde 31 antwoorden. Je kunt daarom onmogelijk achterhalen achter welke van de twee deuren de prijs ligt. \square

Opgave 155 (Finale 1995). *We beschouwen de rijtjes $(a_1, a_2, \dots, a_{13})$ van dertien gehele getallen die in oplopende volgorde staan, dus $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{13}$. Zo’n rijtje heet “tam” indien voor iedere i met $1 \leq i \leq 13$ geldt: als je a_i uit het rijtje weglaat kun je de resterende twaalf getallen verdelen in twee groepjes zodanig dat de som van de getallen in beide groepjes hetzelfde is.*

(a) *Bewijs dat ieder tam rijtje geheel uit even of geheel uit oneven getallen bestaat.*

Een tam rijtje heet “turbo-tam” als je de resterende twaalf getallen telkens kunt verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met dezelfde som.

(b) *Bewijs dat in ieder turbo-tam rijtje alle getallen gelijk zijn.*

Uitwerking.

- (a) Noem S de som van de dertien getallen. Voor elke i kunnen we de overige twaalf getallen (met som $S - a_i$) opdelen in twee groepjes met dezelfde som, die natuurlijk een geheel getal is. Dus $S - a_i$ is voor alle i even. Dus als S even is, dan zijn alle a_i ’tjes even; als S oneven is, dan zijn alle a_i ’tjes oneven.
- (b) Als $(a_1, a_2, \dots, a_{13})$ een turbo-tam rijtje is, dan is $(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{13} - a_1)$ ook een turbo-tam rijtje. Bekijk nu alle turbo-tamme rijtjes $(0, b_2, b_3, \dots, b_{13})$ die beginnen met een 0. We willen bewijzen dat al deze rijtjes alleen maar nullen bevatten; dan zijn we klaar. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat er turbo-tamme rijtjes zijn die met een 0 beginnen en niet alleen nullen bevatten. In al deze rijtjes is dan in elk geval b_{13} een positief geheel getal. Laat $(0, c_2, c_3, \dots, c_{13})$ een turbo-tam rijtje zijn met de kleinste positieve b_{13} . Voor elk ander turbo-tam rijtje $(0, b_2, b_3, \dots, b_{13})$ dat niet alleen uit nullen bestaat, geldt dus $b_{13} \geq c_{13}$. Uit onderdeel a van deze opgave volgt dat c_i even is voor alle i , want 0 is even. Maar dan is $(0, \frac{c_2}{2}, \frac{c_3}{2}, \dots, \frac{c_{13}}{2})$ ook een turbo-tam rijtje. Er geldt $\frac{c_{13}}{2} < c_{13}$, tegenspraak. We concluderen dat er geen turbo-tamme rijtjes zijn die beginnen met een 0 en daarnaast nog een positief getal bevatten. Daaruit volgt dat er geen turbo-tamme rijtjes zijn waarin niet alle getallen gelijk zijn.

\square