Elk jaar in september wordt de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Voor de finalisten die de absolute top net niet halen, maar wel veelbelovend voor de toekomst zijn, is dit jaar voor het eerst het beloftenprogramma opgezet. In dit artikel legt de Leidse wiskundestudent Michiel Versnel uit wat dit inhoudt.

■ door Michiel Versnel

HET BELOFTEN-PROGRAMMA

Het beloftenprogramma van de Nederlandse Wiskunde Olympiade behandelt van vier thema's een stuk theorie en bevat daarnaast uiteraard enkele pittige opgaven. De thema's zijn getaltheorie, meetkunde, algebra en 'kleine gevallen'. Dit laatste houdt in dat je aan de hand van een paar kleine voorbeelden een algemeen patroon probeert te herkennen – heel typerend voor veel olympiade-puzzels.

Met een groep van zeven oud-olympiadedeelnemers verzamelden en bedachten we opgaven, keken we het werk van de deelnemers na en gaven we ze feedback. De onderstaande opgave is bedacht door een van onze eigen beloftentrainers: Mike Daas. Hij komt uit de algebraset, maar het leuke van de vraag is dat er ook nog een stukje van 'kleine gevallen' in voorkomt.

Bij algebra-opgaven is het vaak de bedoeling om oplossingen te vinden van stelsels vergelijkingen. De theorie ging over strategieën om dit soort opgaven op te lossen. Merkwaardige producten, zoals $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, werden bijvoorbeeld behandeld. Ook het feit dat kwadraten groter dan of gelijk zijn aan nul, kwam langs, want dat kan verrassend nuttig zijn.

Probeer de opgave eerst zelf eens te maken, voordat je de oplossing bekijkt. Hij is niet makkelijk, maar het oplossen geeft veel voldoening!

DE OPGAVE

Geef alle mogelijke waarden voor $a + b$, waarbij a en b variëren over de reële getallen,
(a) als moet gelden dat $a^2 + b^2 = 27$ en $ab = 11$;
(b) als moet gelden dat $a^2 + b^2 = 13$ en $a^3 + b^3 = 35$.

OPLOSSING VRAAG A Het kan nooit kwaad om te kijken of je toevallig een oplossing kunt vinden. Maar helaas: als je kleine, gehele getallen probeert voor a en b, komt het nooit uit. De vergelijking $ab = 11$ geeft weinig mogelijkheden als a en b allebei geheel moeten zijn en het is meestal vrij lastig om niet-gehele oplossingen te vinden.

We moeten dus iets anders verzinnen. In de theorie stond iets over substituties: dan druk je in dit geval a uit in b, en vul je deze uitdrukking in voor a.

Als we naar de tweede vergelijking kijken, vinden we dat moet gelden $a = \frac{11}{b}$. Dan krijgen we in de eerste vergelijking:

$$\left(\frac{11}{b}\right)^2 + b^2 = 27.$$

Hiermee is het mogelijk om een kwadratische vergelijking in b^2 te maken en dan alle mogelijke waarden voor b te vinden. Maar misschien is het al duidelijk dat dit heel veel rekenwerk wordt. Deze methode kunnen we in ons achterhoofd houden als er verder niets lukt, maar laten we eerst proberen om een eenvoudigere oplossing te vinden.

In de theorie stond ook iets over merkwaardige producten. Vooral $(a - b)^2$ en $(a + b)^2$ vallen op, want in die producten vinden we de termen a^2, b^2 en ab, precies de termen die ook in de vergelijkingen staan. En we willen waarden voor $a + b$ vinden, dus $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ lijkt de logische keuze. Dit krijgen we precies als we de tweede vergelijking twee keer optellen bij de eerste.

Dus $a^2 + b^2 + 2ab = 27 + 2 \cdot 11$, waaruit volgt dat $(a + b)^2 = 49$. Dan zien we snel dat $a + b = -7$ of $a + b = 7$. Klaar? Nog niet helemaal.

We hebben nu laten zien: als (a, b) een oplossing is voor beide vergelijkingen, dan moet gelden dat $a + b = \pm 7$. Maar dat wil nog niet zeggen dat er een oplossing (a, b) met $a + b = 7$ of $a + b = -7$ *bestaat*!

Dus we moeten nog aantonen (of weerleggen) dat er oplossingen (a, b) bestaan met $a + b = \pm 7$. Stel dat (a_0, b_0) een oplossing is met $a_0 + b_0 = 7$. Dan geldt dat $b_0 = 7 - a_0$. Als we dat invullen in de tweede vergelijking, krijgen we $a_0(7 - a_0) = 11$, oftewel $a_0{}^2 - 7a_0 + 11 = 0$. Dit is een kwadratische vergelijking, waarvan de discriminant gelijk is aan $(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 5$. Er bestaan dus twee reële oplossingen a_0, en $b_0 = 7 - a_0$ is daarmee ook reëel. Zonder de oplossing expliciet te geven (dit kan natuurlijk wel, maar is meer werk) hebben we hiermee aangetoond dat er a en b zijn zodat $a + b = 7$ en $ab = 11$, en dan volgt vanzelf ook dat $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 7^2 - 2 \cdot 11 = 27$.

Het is mogelijk om iets dergelijks te doen bij de andere kandidaat $a + b = -7$. Maar je kunt ook inzien dat $(-a_0, -b_0)$ ook een oplossing is: er geldt namelijk dat $(-a_0)^2 + (-b_0)^2 = a_0{}^2 + b_0{}^2$ en $(-a_0) \cdot (-b_0) = a_0b_0$. En $-a_0 - b_0 = -(a_0 + b_0) = -7$. We concluderen dat -7 en 7 alle mogelijke waarden zijn voor $a + b$.

OPLOSSING VRAAG B We kunnen iets soortgelijks als bij vraag a proberen, maar laten we eerst even kijken of we alvast een oplossing kunnen vinden. Na een beetje puzzelen heb je wellicht gemerkt dat $a = 2$ en $b = 3$ (en andersom) voldoet. Dit geeft dan $a + b = 5$.

Andere oplossingen laten zich, met het proberen van een paar kleine getallen, niet vinden. Maar dat wil nog niet zeggen dat ze er niet zijn. Bij vraag a deden we iets met $(a + b)^2$. Aangezien er nu derdemachten zijn, kunnen we iets proberen met $(a + b)^3$. Er geldt dat $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Twee termen staan ook in de vergelijkingen, de twee andere helaas niet. Maar die kunnen we wel maken door de eerste vergelijking met $3a$ of $3b$ te vermenigvuldigen: $3a^3 + 3ab^2 = 39a$ en $3a^2b + 3b^3 = 39b$. We krijgen er nu een $3a^3$ en $3b^3$ bij, maar dat is niet zo erg. De $39a$ en $39b$ maken het wel vervelend: we kunnen nu niet hetzelfde doen als bij a.

Maar laten we gewoon kijken wat er gebeurt: we vinden dat $3a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + 3b^3 = 39a + 39b$. We hebben net twee a^3 en b^3 te veel, maar dat kunnen we verhelpen met de tweede vergelijking: er geldt namelijk dat $2a^3 + 2b^3 = 70$. Als we deze vergelijkingen van elkaar aftrekken, krijgen we $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 39a + 39b - 70$. Hieruit volgt dat $(a + b)^3 = 39(a + b) - 70$. Schrijf voor het gemak even $a + b = x$, dan moet er dus gelden dat $x^3 - 39x + 70 = 0$. Dit is een derdegraadsvergelijking en is niet zo maar op te lossen.

Gelukkig hadden we al een oplossing: $x = 5$. We zien inderdaad dat $5^3 - 39 \cdot 5 + 70 = 0$. Nu weten we dat $x^3 - 39x + 70$ te schrijven is als $x - 5$ vermenigvuldigd met een tweedegraads-uitdrukking.

Door een beetje te puzzelen (of door een staartdeling te maken) vinden we dat $x^3 - 39x + 70 = (x - 5)(x^2 + 5x - 14) = (x - 5)(x - 2)(x + 7)$. Dit moet gelijk zijn aan nul, dus we hebben nu nog drie kandidaten over: $a + b = -7$, $a + b = 2$ en $a + b = 5$.

We weten dat de laatste ook daadwerkelijk een oplossing heeft, dus we hoeven nu alleen nog te kijken of er oplossingen bestaan met $a + b = -7$ en $a + b = 2$. Stel dus dat (a_1, b_1) een oplossing is met $a_1 + b_1 = -7$. Dan is $b_1 = -a_1 - 7$. Uit onze eerste vergelijking krijgen we dan $13 = a_1{}^2 + (-a_1 - 7)^2 = 2a_1{}^2 + 14a_1 + 49$. Hieruit volgt dat $2a_1{}^2 + 14a_1 + 36 = 0$. De discriminant is dan $14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 36 = -92$; negatief, en dus kan er geen reële oplossing voor a_1 zijn.

En stel dat (a_2, b_2) een oplossing is met $a_2 + b_2 = 2$. Dan vinden we op dezelfde manier dat $13 = a_2{}^2 + (2 - a_2)^2 = 2a_2{}^2 - 4a_2 + 4$, oftewel $2a_2{}^2 - 4a_2 - 9 = 0$. De discriminant is nu $(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 88$. Nu is er dus wel een reële oplossing voor a_2 die we opnieuw niet expliciet hoeven uit te rekenen.

We concluderen: de enige mogelijke waarden voor $a + b$ zijn 2 en 5.

JIJ OOK? De deelnemers aan het beloftenprogramma hebben de afgelopen maanden met veel plezier aan deze en andere opgaven gewerkt, en gaan nu vol vertrouwen op weg naar de volgende finale van de wiskunde olympiade. Wie weet ben jij er volgend jaar ook bij! ■