Kees den Tex

Met munten slepen bij de IMO in Oslo

Kees den Tex deed in Oslo mee aan de International Mathematical Olympiad (IMO) 2022. De IMO bestaat uit twee dagen toetsen met op elke toets drie opgaven, waarvoor je 4,5 uur de tijd krijgt. In dit artikel bespreekt Kees zijn oplossing van opgave 1 en laat hij zien hoe je aan dit soort opgaven kunt beginnen.

Opgave 1. De bank van Oslo geeft twee soorten munten uit: van aluminium (genoteerd met een A) en van brons (genoteerd met een B). Máxima heeft n aluminium munten en n bronzen munten in een willekeurige beginvolgorde op een rij gelegd. Een *keten* is een willekeurige deelrij van opeenvolgende munten van dezelfde soort. Gegeven een vast geheel getal k met $1 \leq k \leq 2n$, voert Máxima herhaaldelijk de volgende handeling uit: ze bepaalt de langste keten die de k-de munt vanaf links bevat, en verplaatst alle munten in die keten naar het begin van de rij. Bijvoorbeeld, als $n = 4$ en $k = 4$, dan zouden de opeenvolgende handelingen bij beginvolgorde $AABBBABA$ als volgt zijn:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Bepaal alle paren (n, k) met $1 \leq k \leq 2n$ zodanig dat voor elke beginvolgorde op een gegeven moment in het proces de eerste n munten vanaf links allemaal van dezelfde soort zijn.

Opgave begrijpen

Het begint natuurlijk met het goed lezen en begrijpen van de opgave. Wat gebeurt er bijvoorbeeld precies in dat voorbeeld? Omdat $n = 4$ zijn er vier aluminium munten en vier bronzen munten. Wegens $k = 4$ wordt telkens gekeken in welke langste keten de vierde, onderstreepte munt zich bevindt. Bij de eerste 'handeling' is dat de keten BBB op posities 3, 4 en 5; die wordt dus bij de zet naar voren verplaatst. Bij de volgende stap gaat het juist om de keten AAA op posities 4, 5 en 6. Uiteindelijk kom je, althans voor dit beginrijtje, uit bij een rijtje dat begint met vier dezelfde munten en dat dus voldoet aan de gewenste situatie in de opgave. Wat mij als eerste opvalt, is dat deze opgave een combinatoriek-opgave is. Er zijn vier verschillende soorten opgaven bij de IMO: algebra, meetkunde, getaltheorie en combinatoriek. Bij combinatoriek is het altijd nuttig om kleine gevallen te doen om een gevoel voor de opgave te krijgen.

Kleine gevallen

Met kleine gevallen doen bedoel ik de opgave oplossen voor een kleine n. We beginnen bij $n = 1$. Dan is er in feite maar één manier om de munten neer te leggen: AB (want BA is niet wezenlijk anders). En dit rijtje voldoet gelijk al, dus k = 1, 2 voldoen. Nu hebben we dus bewezen dat $(n, k) = (1, 1)$ en $(1, 2)$ voldoen.

Nu gaan we kijken naar het volgende kleine geval: $n = 2$. Zonder beperking van de algemeenheid hebben we nu precies drie verschillende rijen:

$AABB$, $ABBA$, $ABAB$

We gaan voor elk van $k = 1, 2, 3, 4$ alle drie de beginrijtjes af om te zien of k voldoet. Voor $k = 1$ werkt het eerste rijtje wel (dat voldoet meteen al), maar voldoen het tweede en derde rijtje niet; die veranderen namelijk niet bij een handeling en zullen dus nooit uitkomen op $AABB$ of $BBAA$.

Voor $k = 2$ werken alle rijtjes wel:

$A\underline{A}BB$ (voldoet meteen al)

$A\underline{B}BA \to B\underline{B}AA$

$A\underline{B}AB \to B\underline{A}AB \to A\underline{A}BB$

Ook voor $k = 3$ blijken alle rijtjes te werken. Bij $k = 4$ gaat het mis bij het laatste rijtje:

$$ABA\underline{B} \to BAB\underline{A} \to ABA\underline{B} \to BAB\underline{A} \to \dots$$

Nu kunnen we uit de twee gevallen die misgaan al wat informatie halen.

Een tegenvoorbeeld vinden

Bij $k = 1$ gaat het mis omdat je dan de eerste (meest linkse) keten verplaatst, waarbij we vanaf nu het woord 'keten' zullen gebruiken voor het langste aaneengesloten rijtje van munten van dezelfde soort. In feite gebeurt er dan helemaal niks, want dan verplaats je de eerste keten weer terug naar links, alleen die stond daar al. Als het beginrijtje niet direct voldoet, zal het ook na een aantal zetten nooit voldoen, want het blijft steeds hetzelfde. Zijn er (voor algemene n) nog meer k waarbij het om deze reden misgaat? Hiervoor zoeken we een beginrijtje van munten waarin de k-de munt in de eerste keten zit.
Voor $k \leq n$ kunnen we dit waarmaken met bijvoorbeeld het rijtje $A\dots A\underline{A}B\dots BA\dots A$
bestaande uit k aluminium munten, daarna n bronzen munten en tot slot nog $n - k$ aluminium munten. Dit rijtje blijft inderdaad steeds hetzelfde na een zet; we kiezen namelijk altijd de eerste keten, want die loopt door tot plek k. We hebben dus nu een beginrijtje dat constant blijft voor $k \leq n$. Alleen voor $k = n$ is dit precies de situatie waar we naartoe moeten. Voor alle andere k is dit wel een tegenvoorbeeld want dan is het niet de gewenste eindsituatie, terwijl ons rijtje niet meer verandert bij het doen van een handeling. Nu hebben we dus bewezen dat $k < n$ nooit voldoet.

Nog meer kleine gevallen

Bij $n = 2$ werkte $k = 4$ ook niet. Hier kwam het beginrijtje $ABAB$ in een oneindige lus; we brengen namelijk de hele tijd de laatste munt naar het begin. Om dezelfde reden komen we voor $n > 2$ en $k = 2n$ met het rijtje $ABAB\dots ABAB$ in een oneindige lus. Voor $k = 2n$ is er dus altijd een tegenvoorbeeld. De vraag is nu dus hoe het zit met de overige k, dus die waarvoor $n \leq k < 2n$. Om dit te onderzoeken, had ik nog een paar kleine gevallen gedaan. Ik had bijvoorbeeld naar dit rijtje gekeken met $n = 3$ en $k = 5$:

$$ABAB\underline{A}B \to AABA\underline{B}B \to BBAA\underline{B}A \to BBBA\underline{A}A$$

Dit rijtje gaat dus goed, maar om zeker te weten dat $k = 5$ voldoet, moeten we dit voor alle tien de mogelijke beginrijtjes (die met een A beginnen) controleren; dat blijkt zo te zijn. Maar bij $n = 4$ vond ik toch nog een extra tegenvoorbeeld voor $k = 7$:

$$AABBAA\underline{B}B \to BBAABB\underline{A}A \to AABBAA\underline{B}B \to$$
$$BBAABB\underline{A}A \to \dots$$

Nog meer tegenvoorbeelden

Op deze manier zijn nog veel meer tegenvoorbeelden te vinden. Hierbij maken we onderscheid tussen even en oneven n; we schrijven $n = 2m$ respectievelijk $n = 2m + 1$. In geval $n = 2m$ (met $m \geq 1$) bekijken we het beginrijtje

$$A\dots AB\dots BA\dots AB\dots B$$

bestaande uit eerst m aluminium munten, dan m bronzen munten, dan weer m aluminium munten en tot slot m bronzen munten. Dit rijtje komt in een lus (met periode 2) als je de hele tijd de laatste keten verplaatst, en dus voldoet de bijbehorende k niet. Hierom moet $k \geq 3m + 1$, want de eerste drie ketens hebben totale lengte $3m$.
Voor oneven $n = 2m + 1$ met $m \geq 1$ kun je iets soortgelijks doen; we bekijken dan het beginrijtje

$$A\dots AB\dots BA\dots AB\dots B$$

bestaande uit eerst $m + 1$ aluminium munten, dan $m + 1$ bronzen munten, dan m aluminium munten en tot slot m bronzen munten. Dit rijtje komt in een lus (met periode 4) als je de hele tijd de laatste keten verplaatst. De eerste drie ketens hebben totale lengte $3m + 2$ (en na doordraaien blijft dat hetzelfde of wordt dat $3m + 1$), dus voor $k \geq 3m + 3$ verplaatsen we bij een handeling altijd de laatste keten naar voren.
Al concluderend: de enige k die zouden kunnen voldoen, zijn $2m \leq k \leq 3m$ voor even $n = 2m$, en $2m + 1 \leq k \leq 3m + 2$ voor oneven $n = 2m + 1$ (met $m \geq 1$); voor alle andere k hebben we immers tegenvoorbeelden gevonden. (Het geval $n = 1$ hebben we hierboven al apart gedaan.)

Wat gebeurt er nou eigenlijk met de rij?

Bij zo'n opgave waarbij je handelingen oftewel zetten moet doen, is een mogelijke strategie om op zoek te gaan naar een invariant of een halfvariant: een grootheid/waarde die constant blijft bij elke zet of juist afneemt.
In dit geval verandert bijvoorbeeld af en toe het aantal ketens in de rij. Als je immers een keten ergens in het midden weghaalt, dan zit links en rechts daarvan een keten van de andere soort. Bij het weghalen van deze keten, komen er dus twee ketens van dezelfde munt samen en dat wordt dan precies één keten; daardoor neemt het aantal ketens al met één af. En de naar voren verplaatste keten kan ook nog eens samensmelten met de oorspronkelijke eerste keten als die van dezelfde soort zijn; in dat geval daalt het aantal ketens in totaal zelfs met twee. Het totale aantal ketens gaat dus met een of twee omlaag als je een keten ergens in het midden verplaatst. Verder is het duidelijk dat we precies in de eindsituatie zijn beland zodra het totale aantal ketens nog maar twee is. >

We willen daarom het volgende bewijzen voor de eerdergenoemde waarden van k: zolang het aantal ketens in totaal nog groter dan twee is, zal het op den duur met minstens één afnemen, oftewel zal een keten ergens in het midden worden verplaatst. We gaan dit uit het ongerijmde bewijzen, door aan te nemen dat dit niet zo is en te hopen dat we dan op een tegenspraak uitkomen. We gaan dus uit van een k waarvoor geldt dat $2m \le k \le 3m$ in geval n even is ($n = 2m$), of $2m + 1 \le k \le 3m + 2$ in geval n oneven is ($n = 2m + 1$) en veronderstellen juist dat het aantal ketens constant blijft. Dan wordt dus telkens de meest linker- of juist de meest rechterketen verplaatst. De eerste keten kan wegens $k \ge n$ alleen maar als $k = n$, wat betekent dat de beginrij gelijk is aan eerst n munten van de ene soort en dan n van de andere soort. Maar dan waren we al klaar geweest. We mogen dus aannemen dat telkens de laatste keten wordt verplaatst, en dat bovendien de laatste keten van een andere soort is dan de eerste keten (want anders zou het aantal ketens toch afnemen).

Bewijs dat de resterende *k* wel voldoen

We bekijken eerst het geval dat n oneven is, dus stel dat $n = 2m + 1$ (met $m \ge 1$) en $2m + 1 \le k \le 3m + 2$, en veronderstel dat het totale aantal ketens groter is dan twee en tijdens het proces niet afneemt. Dan geldt voor elk van beide soorten munten dat er minstens twee ketens zijn; immers de eerste en laatste keten zijn van een andere soort, dus er zijn er evenveel van beide soorten, en in totaal meer dan twee. Die kunnen niet allemaal lengte minstens $m + 1$ hebben, want dan zouden er van een soort munten in totaal minstens $2(m + 1) = 2m + 2$ zijn, terwijl er maar $n = 2m + 1$ munten van elke soort zijn. Er moet dus wel een keten zijn van lengte hooguit m.
Door alsmaar een zet te doen en daarbij telkens de laatste keten te verplaatsen (zodat het aantal ketens constant blijft) waarbij de ketens dus cyclisch doorschuiven, komt deze keten van lengte hooguit m vanzelf een keer op het eind te staan. Die laatste keten begint dan op positie $2n - m + 1 = 4m + 2 - m + 1 = 3m + 3$ of nog meer naar rechts. Dus om weer de meest rechtse keten te pakken bij de volgende zet, moet $k \ge 3m + 3$. Maar dat is in tegenspraak met $k \le 3m + 2$. Het kan dus niet zo zijn dat het aantal ketens eeuwig constant blijft zolang het groter is dan twee, dus het zal op den duur op twee uitkomen. Hiermee hebben we bewezen dat alle k met $2m + 1 \le k \le 3m + 2$ voldoen, en hiervoor hadden we al gezien dat alle andere k niet voldoen omdat daar tegenvoorbeelden bij te maken zijn. Voor $n = 2m$ gaat het bewijs vrijwel analoog en kom je erop uit dat alle k met $2m \le k \le 3m$ voldoen. Ik had deze opgave redelijk snel opgelost, wat mij wel wat zelfvertrouwen gaf. Hierdoor had ik ook extra veel tijd voor opgave 2, waar voor mij de opgaven pas echt heel lastig worden.

TeamNL v.l.n.r.: Jelle Bloemendaal, Wouter Zandsteeg (aanmoedigingsprijs), Casper Madlener, Mads Kok, Kees den Tex, Lance Bakker en Lars Pos

Hoe train je voor de IMO?

Om naar de IMO te mogen gaan moet je het hele selectieproces van de Nederlandse Wiskunde Olympiade doorlopen. Dit begint bij de eerste ronde, dan de tweede ronde en dan als laatste de finale, zou je misschien denken. Helaas ben je er dan nog steeds niet; na de finale kom je, als je die goed genoeg hebt gemaakt, in de trainingsgroep. Deze groep bestaat meestal uit de tien beste zesdeklassers, de tien beste vijfdeklassers en de tien beste uit klas vier of lager. Zelf zit ik al sinds het begin van mijn derde jaar op de middelbare school in deze trainingsgroep. Je krijgt elke week drie of vier opgaven die je probeert op te lossen. Op zaterdag stuur je uiterlijk je antwoorden in, ook als het geen oplossingen zijn. Je krijgt daarna commentaar op je bewijs, of hints om verder te komen met de opgave. Ik heb dus vier jaar lang in training gezeten en met dit extra huiswerk had ik altijd wel iets te doen (wiskunde op school kostte mij nooit zo veel tijd). Hierdoor verveelde ik me nooit op school, de opgaven zijn namelijk op het niveau dat je ze net wel of net niet oplost. Zelf was ik hier elke week rond de zes uur mee zoet; meer kan ook als je er tijd voor hebt en als je een weekje wat minder tijd hebt is dat ook geen probleem. Eens in de maand komt de hele trainingsgroep samen, een dag of een weekend lang. Dan krijgen we nieuwe theorie uitgelegd en gaan daar ook meteen mee aan de slag om dat te kunnen gaan gebruiken voor internationale wedstrijden. Op deze dagen heb je drie sessies van 3 à 3,5 uur; uiteindelijk ben je op zo'n dag wel

10 uur bezig met wiskunde. Vorig jaar had ik me na drie jaar trainen eindelijk geplaatst voor de IMO en had er een eervolle vermelding behaald. Dit jaar had ik me op het nippertje weer geplaatst en heb ik een bronzen medaille gehaald op de IMO. Al met al kijk ik terug op vier leerzame jaren. Ik heb er heel veel vrienden gemaakt; een aantal zal ik terugzien als ik in Leiden ga studeren. Ik merk nu al dat ik de wiskunde een beetje begin te missen. Verder ben ik natuurlijk ook heel blij met mijn bronzen medaille waar ik al die tijd naartoe heb gewerkt.

Over de auteur

Kees den Tex (18) is oud-leerling van het Gemeentelijk Gymnasium Hilversum. De afgelopen twee jaar vertegenwoordigde hij Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade en behaalde daar achtereenvolgens een eervolle vermelding en een bronzen medaille. Daarnaast zit hij in het Nederlands team wedstrijdzeilen. Inmiddels studeert hij wiskunde aan de Universiteit Leiden.
E-mailadres: *kees.den.tex@gmail.com*