Tjeerd Morsch

Bergstations verbinden in Egmond aan Zee

Afgelopen zomer zou de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaatsvinden in Sint-Petersburg. Vanwege de coronapandemie konden de deelnemers niet naar Rusland afreizen en hebben ze de olympiade in hun eigen land als wedstrijd-op-afstand gemaakt. In dit artikel bespreekt deelnemer Tjeerd Morsch opgave 4.

Inleiding

De afgelopen drie jaar heb ik meegedaan met het trainingsprogramma van de wiskundeolympiade. Nadat ik een goede score op de finale had gehaald, werd ik uitgenodigd voor de trainingsgroep waar ik drie jaar lang een intensief (en heel leuk) trainingsprogramma heb gevolgd. Hier oefen je veel wiskunde en bereid je je voor op meerdere wedstrijden. De belangrijkste wedstrijd is de IMO (de internationale wiskundeolympiade). Ik was dan ook extreem blij dat ik me afgelopen zomer gekwalificeerd had voor de IMO en ondanks dat het dit jaar door corona niet in Sint-Petersburg was maar in Egmond aan Zee had ik er veel zin in. Aan de voorbereiding zou het in ieder geval niet liggen, want voordat de wedstrijd begon hadden we al heel veel oefentoetsen gemaakt en nog meer losse opgaven gedaan. Het grappige van veel IMO-opgaven is wel dat bijna elke opgave totaal anders is dus dat hoeveel je je ook voorbereidt, je altijd voor een compleet nieuw probleem staat.

De IMO bestaat uit zes opgaven die verspreid zijn over twee wedstrijddagen van 4,5 uur. Er zit verschil in moeilijkheidsgraad: opgave 1 is lastig, maar voor de meeste deelnemers wel op te lossen, opgave 2 is een heel stuk moeilijker en wordt meestal door redelijk wat leerlingen (gedeeltelijk) opgelost en opgave 3 is soms vrijwel onmogelijk (voor mij dan).

De opgave die ik vandaag ga bespreken was de eerste opgave van de tweede dag.

Mijn eerste gedachte was: 'Wat een lange tekst zeg!' Vervolgens heb ik de opgave meerdere keren gelezen om er zeker van te zijn dat ik de opgave helemaal begreep. Voor de lezers die zich aan de opgave willen wagen is dit het moment om dit artikel even opzij te leggen, want hieronder volgt de uitwerking.

IMO 2020

Opgave 4. Gegeven is een geheel getal $n > 1$. Er zijn n^2 stations op een berghelling, allemaal op verschillende hoogtes. Er zijn twee firma's, A en B, die elk k kabelbanen beheren. Met elke kabelbaan kun je van een van de stations naar een hogergelegen station gaan (zonder tussenstops). De k kabelbanen van A hebben k verschillende beginpunten en k verschillende eindpunten, en een kabelbaan die hoger begint dan een andere, eindigt ook hoger. Hetzelfde geldt voor firma B. We zeggen dat twee stations door een firma verbonden zijn als je van het lagere naar het hogere station kunt gaan door alleen gebruik te maken van een of meer kabelbanen van die firma (geen andere bewegingen tussen de stations zijn toegestaan).

Bepaal het kleinste (strikt) positieve gehele getal k zodat je zeker weet dat er twee stations zijn die door de beide firma's verbonden zijn.

Opgave 4 van IMO 2020

Kleine gevallen

Regel één bij bijna elke complexe opgave is om eerst wat te proberen met kleine gevalletjes. Met zo'n lange opgave als deze heb je soms geen idee waar je moet beginnen of waar de opgave nou precies om draait. Een voorbeeldje kan goed helpen om wat meer gevoel te krijgen voor de opgave. In deze opgave is n een natuurlijk getal groter dan 1 dus laten we met $n = 2$ beginnen. Er zijn nu dus $2^2 = 4$ stations. Laten we deze voor het gemak stations 1, 2, 3 en 4 noemen, waarbij station 1 het laagst ligt, 2 het een-na-laagste enzovoort. We gaan nu proberen zoveel mogelijk kabelbanen in te delen, zo dat juist geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn.

We beginnen met de kleinst mogelijke k, namelijk $k = 1$. Beide firma's hebben nu één kabelbaan en het is nu overduidelijk dat er niet altijd hoeft te gelden dat er twee stations bestaan die door beide firma's verbonden zijn. Zo kan firma A stations 1 en 2 verbinden en firma B stations 3 en 4. Laten we nu $k = 2$ proberen, dus beide firma's hebben twee kabelbanen. We kunnen beginnen met firma A. Zeg dat firma A de verbindingen 1-2 en 2-3 heeft. Nu hebben we een probleem voor firma B. Het is onmogelijk om twee verbindingen voor firma B te kiezen

zodat geen twee stations verbonden zijn door zowel A als B. We weten namelijk dat firma B twee kabelbanen heeft en omdat twee eindstations van één firma niet hetzelfde station mogen zijn, weten we dat station 2 of 3 een eindstation moet zijn van een kabelbaan van firma B. In beide gevallen zijn van het drietal stations 1, 2, 3 er minstens twee verbonden door beide firma's (ofwel 1 en 2, ofwel 1 en 3, ofwel 2 en 3).
Dit betekent niet dat $k = 2$ niet kan, ik kan immers twee andere kabelbanen kiezen voor firma A dan 1-2 en 2-3. Stel dat firma A de kabelbanen 1-2 en 3-4 heeft en firma B de kabelbanen 1-3 en 2-4 heeft. Nu zien we dat geen twee stations door beide firma's verbonden zijn! Laten we nu $k = 3$ proberen. Als een firma drie kabelbanen heeft met verschillende eindstations en beginstations moeten dit wel de kabelbanen 1-2, 2-3 en 3-4 zijn, maar als beide firma's deze kabelbanen hebben is elk tweetal stations door beide firma's verbonden! Bij $n = 2$ is $k = 3$ dus de kleinste k waarvoor je zeker weet dat twee stations door beide firma's verbonden zijn.

> "Hoeveel je je ook voorbereidt, je staat altijd voor een compleet nieuw probleem."

We hebben nu een beter gevoel wat de bedoeling is. Dit soort opgaven zijn eigenlijk twee opgaven in één. Ten eerste moet je bewijzen dat voor een zekere k altijd geldt dat twee stations door beide firma's verbonden zijn en ten tweede moet je bewijzen dat er voor alle k kleiner dan het antwoord een constructie bestaat waarbij geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn. Een van de begeleiders zei ooit dat je zo'n soort opgave eigenlijk als een wedstrijd met jezelf kunt zien, aan de ene kant probeer je een constructie te vinden waarbij geen twee stations verbonden zijn door beide firma's voor een zo groot mogelijke k en aan de andere kant probeer je te bewijzen dat er altijd twee stations verbonden zijn door beide firma's voor een zo klein mogelijke k. Als deze twee k's elkaar tegenkomen ben je klaar!

Meer kleine gevallen

We weten dat bij $n = 2$, de k die we zoeken 3 is, maar helaas moeten we de opgave voor alle n oplossen. Op dit moment hebben we eigenlijk geen idee wat de minimale k voor andere n moet worden. We kunnen kijken naar meer kleine gevallen natuurlijk!

Het volgende waar we naar kunnen kijken is $n = 3$. Dan hebben we $3^2 = 9$ stations. Ik vond het zelf nog best leuk om met negen stations te prutsen en te kijken wat de maximale k is waarvoor geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn. Dit is al wat moeilijker dan bij $n = 2$. Hier was ik tijdens de wedstrijd ook best een tijdje mee bezig. Ik dacht eerst dat er bij zes kabelbanen altijd twee stations door beide firma's verbonden zijn, maar dit blijkt niet zo te zijn! Als we de $3^2 = 9$ stations net als eerder de cijfers 1 tot en met 9 geven waarbij 1 het laagste station is, 2 het een-na-laagste, enzovoort, dan kunnen we de negen stations in een tabel zetten op de volgende manier:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Laat firma A de horizontale lijnen verbinden en firma B de verticale, dan krijgen we voor A de verbindingen: 1-2, 2-3, 4-5, 5-6, 7-8, 8-9 en voor B de verbindingen: 1-4, 4-7, 2-5, 5-8, 3-6 en 6-9.
Dit is een oplossing, omdat er nu geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn. Dit zou namelijk betekenen dat deze twee stations in dezelfde rij en dezelfde kolom zouden moeten staan, wat natuurlijk niet kan.

Ingeving

Het voelt intuïtief alsof deze gevonden verdeling die we nu hebben optimaal is, omdat deze zo moeilijk te vinden was, maar hoe bewijs je zoiets? Een goed idee is meestal om te kijken of we iets kunnen vinden dat bij $k = 7$ altijd anders is dan bij $k = 6$. Ik vond dit de lastigste stap in de opgave en ik zat hier, denk ik, wel 20 minuten vast tot ik opeens een heel goed idee kreeg, gek genoeg, op de wc!

Ik vroeg me af: wanneer zijn twee stations door één firma met elkaar verbonden? Door de voorwaarde dat elk station bij iedere firma hoogstens één keer het eindstation is van een kabelbaan en hoogstens één keer het beginstation, kunnen we stations die bij elkaar verbonden zijn in een rijtje zetten. In het voorbeeld hierboven heeft firma B de rijtjes 1-4-7, 2-5-8 en 3-6-9. Het leek me nuttig om naar dit soort rijtjes te kijken en ik noemde dit soort rijtjes een keten.

Er geldt nu dat in elke keten elk station a precies verbonden is met het hoogste station lager dan a en het laagste station hoger dan a uit de keten. Dit is intuïtief heel logisch maar om het als een goed bewijs te formuleren is nog best lastig. Daarom heb ik besloten dat ik het hierbij laat en dat jullie het van mij mogen aannemen. We zien nu dat twee stations met elkaar verbonden zijn als ze in dezelfde keten staan. In het voorbeeld zijn de stations 1 en 7 dus verbonden door firma B.

Wat me hierna opviel was dat in het voorbeeld hierboven firma A en B allebei precies drie verschillende ketens hebben. Als we nu voor $k = 7$ wat voorbeeldjes proberen, valt het op dat beide firma's altijd maar twee verschillende ketens hebben! Dit kunnen we ook bewijzen. Stel we schrijven alle verschillende ketens van een firma onder elkaar. Als een station met geen enkel ander station verbonden is en dus niet in een keten voorkomt, kunnen we zeggen dat dit station zelf een keten is, alleen dan zonder verbindingen. Op deze manier zien we dat elk van de negen stations in precies één keten voorkomt. Hoeveel kabelbanen zijn er nu in iedere keten?
In ons geval geldt voor 1-4-7 dat dit er twee zijn en het is simpel na te gaan dat er altijd één kabelbaan minder is dan het aantal stations in de keten, want in een keten is elk station met precies zijn buren verbonden. Nu proberen we het aantal kabelverbindingen uit te drukken in het aantal ketens. Als er in totaal maar één keten is hebben we in totaal acht kabelbaanverbindingen. Bij twee ketens is het misschien wat lastiger in te zien dat we in totaal zeven kabelverbindingen hebben. Als we een keten van x stations hebben en een keten van $9 - x$ stations, dan heeft de keten van x stations in totaal $x - 1$ kabelverbindingen en de keten van $9 - x$ stations in totaal $9 - x - 1$ kabelverbindingen. In totaal geeft dit samen $x - 1 + 9 - x - 1 = 7$ kabelverbindingen. Andersom moeten er precies twee ketens zijn als er zeven kabelverbindingen zijn, omdat iedere extra keten een kabelverbinding minder geeft.
Dus in ons voorbeeld met $n = 3$ en $k = 7$ hebben firma A en firma B elk twee ketens. Omdat er negen stations zijn en twee ketens per firma moeten er minstens vijf stations in eenzelfde keten zitten van firma A! Maar als we nu drie van deze vijf stations bekijken voor firma B zien we dat deze niet allemaal in een andere keten kunnen zitten, omdat firma B ook maar twee verschillende ketens heeft! Samengevat: er zijn altijd twee stations te vinden die in dezelfde keten zitten van firma A en in dezelfde keten van firma B, maar dat betekent dat deze twee stations door beide firma's verbonden zijn en dat we bij $k = 7$ dus altijd weten dat er twee stations verbonden zijn door beide firma's!

Het bewijs

We hebben de opgave nu opgelost voor $n = 2$ en $n = 3$, en bij $n = 3$ hebben we veel nuttige dingen gevonden die misschien ook wel werken voor andere n. Zo viel het mij tijdens de wedstrijd op dat we de constructie voor $n = 3$ en $k = 6$ algemeen kunnen maken voor alle n. We kunnen elke n^2 stations namelijk altijd in een dergelijke matrix zetten en op dezelfde wijze de horizontale rijen en verticale kolommen verdelen over firma's A en B. We verbinden dus voor firma A de stations 1 en 2, 2 en 3, ..., $n - 1$ en n op de onderste rij, $n + 1$ en $n + 2$, ..., $2n - 1$ en $2n$ op de tweede rij, tot en met $n^2 - 1$ en n^2 op de bovenste rij. Voor firma B verbinden we de stations 1 en $n + 1$, $n + 1$ en $2n + 1$, ..., $n^2 - 2n + 1$ en $n^2 - n + 1$ in de linkerkolom, tot en met $n^2 - n$ en n^2 in de rechterkolom.

$n^2 - n + 1$	$n^2 - n + 2$	...	...	$n^2 - 1$	n^2
$n^2 - 2n + 1$	$n^2 - 2n + 2$	...	...	$n^2 - n - 1$	$n^2 - n$
...	...			...	...
...	...			...	...
$n + 1$	$n + 2$			$2n - 1$	$2n$
1	2	...	...	$n - 1$	n

We zien nu dus dat twee stations door firma A verbonden zijn als ze in dezelfde rij staan en alleen wanneer ze in dezelfde rij staan en voor firma B geldt precies hetzelfde maar dan voor de kolommen. Hoeveel kabelverbindingen levert dit op? Firma A heeft n horizontale rijen met $n - 1$ verbindingen per rij en firma B heeft n verticale kolommen met $n - 1$ verbindingen per kolom, dus in totaal hebben ze beide $n \cdot (n - 1)$ kabelbanen. Met dezelfde redenering als in het geval $n = 3$ zien we weer dat geen twee stations door beide firma's verbonden zijn. Dit zou namelijk weer betekenen dat deze twee stations in dezelfde rij en dezelfde kolom zouden moeten staan, wat natuurlijk niet kan.

Dus algemeen: voor n^2 stations weten we dat we voor $k = n \cdot (n-1) = n^2 - n$ kabelbanen een oplossing kunnen vinden waarbij geen tweetal stations door beide firma's is verbonden.

Ik had tijdens de wedstrijd ook een heel sterk voorgevoel dat dit de maximale k was waarvoor er niet altijd een tweetal stations door beide firma's verbonden is, dus dat $k = n^2 - n + 1$ het goede antwoord was. Bij de olympiade-training leren we altijd dat als je zo'n vermoeden hebt het slim is om eerst nog het geval $n = 4$ te doen om te kijken of alles klopt, maar ik had daar toen geen zin in en besloot, met mijn bewijs voor $n = 3$ naast me, vol vertrouwen aan mijn bewijs voor alle n te beginnen.
We hebben al laten zien dat we voor $k = n^2 - n$ kabel-verbindingen een verdeling kunnen vinden zonder dat twee stations door beide firma's verbonden zijn.
Als we dus kunnen bewijzen dat met één extra kabelbaan (dus $k = n^2 - n + 1$) er altijd een tweetal stations te vinden is dat door beide firma's verbonden is, dan zijn we klaar en is het antwoord dus $k = n^2 - n + 1$.
We bekijken $k = n^2 - n + 1$ en we willen bewijzen dat er altijd twee stations zijn die door beide firma's verbonden zijn. We proberen dit op dezelfde manier te bewijzen als bij $n = 3$ dus we definiëren ketens weer op dezelfde manier. Net konden we bewijzen dat we met negen stations en zeven verbindingen altijd precies twee ketens hebben. Op dezelfde manier kunnen we, met een klein beetje algebra, het volgende bewijzen:

Bij a stations en b ketens zijn er in totaal $a - b$ kabel-verbindingen.

Het bewijs gaat eigenlijk precies hetzelfde als bij het minibewijs hierboven, alleen dan met b ketens in plaats van twee en a stations in plaats van negen.

We hebben $a = n^2$ stations en $n^2 - n + 1$ kabelverbin-dingen. Hieruit volgt dat we $b = n - 1$ ketens moeten hebben.

Er zijn n^2 stations verdeeld over $n - 1$ ketens. Stel nu dat firma A geen ketens heeft met meer dan $n - 1$ stations. Dit zou betekenen dat er hoogstens $(n - 1)^2$ stations zijn, wat natuurlijk niet klopt, dus er is een keten van Firma A met minstens n stations erin.
Bekijk nu n van deze stations die allemaal in dezelfde keten van firma A zitten. Omdat firma B ook maar $n - 1$ ketens heeft, moet er een keten voor firma B zijn waarin twee of meer van deze n stations zitten. Ze kunnen namelijk niet allemaal in een andere keten zitten, want er zijn maar $n - 1$ ketens. Dit betekent dus dat er altijd een tweetal stations te vinden is dat in dezelfde keten van firma A zit en in dezelfde keten van firma B, maar dat betekent dat deze stations door beide firma's verbonden zijn! Dus voor $k = n^2 - n + 1$ zijn er altijd twee stations verbonden en voor $k = n^2 - n$ niet altijd, dus $k = n^2 - n + 1$ is de minimale k.

Ik vond dit zelf een erg gave opgave, maar dat komt misschien ook omdat ik hem tijdens de IMO wist op te lossen. Daarnaast vond ik de opgave erg elegant omdat beide kanten van het bewijs een mooie oplossing hadden. Deze opgave werd door het hele Nederlandse team goed gemaakt en dit leverde ook mooie resultaten op. Het Nederlandse team werd 29ste van alle landen die meededen en we kunnen dus terugkijken op een geslaagde wedstrijd!

Over de auteur

Tjeerd Morsch is oud-leerling van het Corderius College (Amersfoort) en deed afgelopen zomer mee met de Internationale Wiskunde Olympiade. Hier behaalde hij een bronzen medaille. Hij is 19 jaar en studeert nu wiskunde aan de universiteit van Groningen. E-mailadres: *tjeerd.morsch@gmail.com*