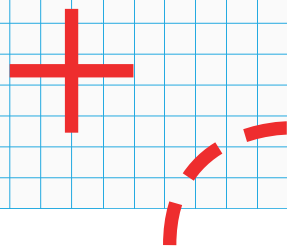




LOGISCH REDENEREN BIJ DE OLYMPIADE

In januari doen vele duizenden scholieren mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Deze bestaat uit acht pittige vijfkeuze-opgaven en vier uitdagende open vragen en de deelnemers krijgen twee uur de tijd om deze te kraken. Om je een indruk te geven van zo'n opgave, bespreken we in dit artikel alle ins en outs van vijfkeuze-opgave A7 van de eerste ronde van 2019: een opgave met logisch redeneren in de hoofdrol.

door **Quintijn Puite**



De 8164 deelnemers die in januari 2019 op 330 scholen meededen aan de eerste ronde kregen onder andere opgaven voor hun neus over een besmettelijke ziekte op een heel groot schaakbord en over een batman-achtig figuur. Daarnaast waren er tel-opgaven ("Op hoeveel manieren kun je ...?") en optimaliseer-opgaven ("Wat is het grootste getal waarvoor

geldt dat ...?"). Maar opgave A7 was een schijnbaar wat minder wiskundig verhaaltje over drie fietsvrienden met elk een andere tweewieler. Wie heeft nou welk soort fiets en van welke kleur? Om dat op te lossen, kwam toch wel een van de meest pure wiskundige vaardigheden goed van pas, namelijk logische redeneren. De opgave ging als volgt:

EERSTE RONDE WISKUNDE OLYMPIADE 2019, OPGAVE A7

Agatha, Isa en Nick hebben alle drie een ander soort fiets. Eén van hen heeft een elektrische fiets, één heeft een racefiets en één heeft een mountainbike. De fietsen hebben elk een andere kleur: groen, blauw of zwart. De drie eigenaren doen elk twee uitspraken, waarvan er één waar is en één onwaar is:

- Agatha zegt: "Ik heb een elektrische fiets. Isa heeft een blauwe fiets."
- Isa zegt: "Ik heb een mountainbike. Nick heeft een elektrische fiets."
- Nick zegt: "Ik heb een blauwe fiets. De racefiets is zwart."

Precies een van de volgende beweringen is met zekerheid waar. Welke?

- Agatha heeft een groene fiets.
- Agatha heeft een mountainbike.
- Isa heeft een groene fiets.
- Isa heeft een mountainbike.
- Nick heeft een elektrische fiets.



Dat zijn een hoop gegevens, waarbij het helemaal niet direct duidelijk is hoe we dit moeten gaan aanpakken. Allereerst gaat het om drie personen die elk een bepaalde soort fiets hebben die van een bepaalde kleur is. De drie soorten kunnen op $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ manieren over de drie personen verdeeld zijn, en onafhankelijk daarvan geldt hetzelfde voor de drie kleuren. Dus er zijn in principe $3! \cdot 3! = 36$ mogelijkheden voor wie er precies welke soort fiets van welke kleur heeft. Een mogelijke verdeling is bijvoorbeeld:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Elektrische fiets	Groen
Isa	Racefiets	Blauw
Nick	Mountainbike	Zwart

Maar uiteraard beperkt het gegeven over de zes uitspraken die gedaan worden (en waarvan telkens één wel en één niet waar is) de mogelijke verdelingen enorm. In bovenstaand geval zouden bijvoorbeeld beide uitspraken van Agatha waar zijn, terwijl juist beide uitspraken van Isa onwaar zijn en idem voor Nick. Deze verdeling kan dus niet voorkomen.

GROTE TABEL

We zouden een grote tabel kunnen maken met een opsomming van al die 36 verdelingen en bij elke verdeling kunnen kijken of het wel waar is dat per persoon precies één van zijn of haar uitspraken waar is. We maken een beginnetje door dit voor 12 van de 36 verdelingen te doen (waarvan de eerste overeenkomt met het geval dat we hierboven hebben bekeken). Zie de tabel rechtboven.

In elke rij zie je wie er welk soort fiets heeft en van welke kleur (eerste zes kolommen). Vervolgens is voor die verdeling aangegeven of de eerste uitspraak van Agatha (A1) al dan niet waar is (waar: 1; onwaar: 0) en idem voor de tweede uitspraak van Agatha (A2). Daarna hetzelfde voor de eerste en de tweede uitspraak van Isa, en ten slotte ook voor Nick. In de laatste kolom zie je of het bij deze verdeling waar is dat van elk van de drie personen er precies één uitspraak klopt, oftewel of deze verdeling *consistent*

soort			kleur									
A	I	N	A	I	N	A1	A2	I1	I2	N1	N2	Consistent
E	R	M	G	B	Z	1	1	0	0	0	0	0
E	R	M	G	Z	B	1	0	0	0	1	1	0
E	R	M	B	Z	G	1	0	0	0	0	1	0
E	R	M	B	G	Z	1	0	0	0	0	0	0
E	R	M	Z	B	G	1	1	0	0	0	0	0
E	R	M	Z	G	B	1	0	0	0	1	0	0
E	M	R	G	B	Z	1	1	1	0	0	1	0
E	M	R	G	Z	B	1	0	1	0	1	0	1
E	M	R	B	Z	G	1	0	1	0	0	0	0
E	M	R	B	G	Z	1	0	1	0	0	1	1
E	M	R	Z	B	G	1	1	1	0	0	0	0
E	M	R	Z	G	B	1	0	1	0	1	0	1

is met het gegeven in de opgave en dus zou kunnen voorkomen.

Als we dit ook voor de 24 resterende verdelingen zouden doen, zouden we zien dat er geen andere verdelingen zijn die kunnen voorkomen dan de drie reeds gevonden verdelingen in de tabel hierboven. We noemen deze drie gevonden verdelingen die daadwerkelijk kunnen voorkomen van boven naar beneden voor het gemak even verdeling 1, 2 en 3.



Verdeling	soort			kleur									
	A	I	N	A	I	N	A1	A2	I1	I2	N1	N2	Consistent
1	E	M	R	G	Z	B	1	0	1	0	1	0	1
2	E	M	R	B	G	Z	1	0	1	0	0	1	1
3	E	M	R	Z	G	B	1	0	1	0	1	0	1

We lopen hiermee de vijf antwoordopties langs:

- A) Agatha heeft een groene fiets: dat is wel zo bij verdeling 1, maar niet bij verdeling 2 en 3, dus dit is niet met zekerheid te zeggen.
- B) Agatha heeft een mountainbike: nee, ze heeft een elektrische fiets.
- C) Isa heeft een groene fiets: dat is wel zo bij verdeling 2 en 3, maar niet bij verdeling 1, dus dit is niet met zekerheid te zeggen.



- D) Isa heeft een mountainbike: dat is bij alle drie de verdelingen zo.
 E) Nick heeft een elektrische fiets: nee, hij heeft juist een racefiets.

We zien dat antwoord D de enige bewering is die bij alle drie de voorkomende verdelingen geldt, dus dit is de enige uitspraak (van deze vijf) die we met zekerheid kunnen doen. Het goede antwoord is dus D.

DEDUCEREN EN REDUCEREN

De meeste deelnemers zullen echter niet als een soort van computer deze 36 verdelingen zijn langs gegaan, maar zullen eerder al hele stukken van de tabel hebben afgeschoten door in het begin al met de uitspraken van de fietsvrienden rekening te houden. Laten we bijvoorbeeld eens kijken naar de uitspraken van Isa, die allebei over het soort fiets gaan:

"Ik heb een mountainbike. Nick heeft een elektrische fiets."

Ook al weten we niet of nou de eerste of de tweede uitspraak waar is, toch zullen we zien dat door haar uitspraken de mogelijke verdelingen direct al met een factor 3 reduceren en er eigenlijk nog maar 12 verdelingen overblijven om te bekijken (die we door verder logisch redeneren overigens niet eens allemaal hoeven te bekijken). We kunnen namelijk twee gevallen onderscheiden, afhankelijk van of haar eerste uitspraak of juist haar tweede uitspraak waar is.

GEVAL 1

Als eerste bekijken we het geval dat Isa's eerste uitspraak waar is en haar tweede uitspraak dus juist onwaar. Dan heeft Isa zelf dus een mountainbike en heeft Nick geen elektrische fiets, dus juist een mountainbike of een racefiets. Maar omdat Isa al een mountainbike heeft, moet Nick dan wel een racefiets hebben. En automatisch heeft Agatha dan een elektrische fiets, de enige soort die nog over is:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Elektrische fiets	
Isa	Mountainbike	
Nick	Racefiets	

Voor de kleur zijn er nog zes mogelijkheden over, die we zouden kunnen onderzoeken in een tabel zoals hiervoor; zie de onderste 6 verdelingen in het begin van de grote tabel met 12 verdelingen. Maar we kunnen ook verder gaan met dingen afleiden uit de uitspraken. Omdat Agatha zegt: "Ik heb een elektrische fiets. Isa heeft een blauwe fiets." en haar eerste uitspraak nu duidelijk waar is, weten we (in dit geval) dus ook zeker dat haar tweede uitspraak niet waar is en Isa dus geen blauwe fiets heeft:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Elektrische fiets	
Isa	Mountainbike	Groen of zwart
Nick	Racefiets	

We bekijken ten slotte ook nog Nicks uitspraken: "Ik heb een blauwe fiets. De racefiets is zwart." Ook nu maken we weer een gevalsonderscheid (binnen het grote geval 1 waar we nog steeds in zitten). Als Nicks eerste uitspraak waar is, heeft hij zelf een blauwe fiets, waardoor zijn tweede uitspraak automatisch onwaar wordt, dus deze twee verdelingen kunnen voorkomen:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Elektrische fiets	Zwart resp. groen
Isa	Mountainbike	Groen resp. zwart
Nick	Racefiets	Blauw

Als juist zijn tweede uitspraak waar is, dan heeft hij dus zelf een zwarte fiets en is zijn eerste uitspraak automatisch onwaar. Verder blijft er voor Isa alleen groen over en moet Agatha dan automatisch blauw krijgen. Ook deze verdeling kan dus voorkomen:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Elektrische fiets	Blauw
Isa	Mountainbike	Groen
Nick	Racefiets	Zwart

Dit zijn precies de drie verdelingen die we eerder hadden gevonden in onze grote tabel, maar nu zijn we erop uitgekomen door

juist van de uitspraken uit te gaan in plaats van alle mogelijke verdelingen systematisch af te lopen.

GEVAL 2

We bekijken nu het geval dat Isa's tweede uitspraak waar is en haar eerste uitspraak dus juist onwaar. Dan heeft Nick een elektrische fiets en heeft Isa zelf geen mountainbike. Nu moet Isa dus wel een racefiets hebben, waardoor Agatha juist een mountainbike heeft:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Mountainbike	
Isa	Racefiets	
Nick	Elektrische fiets	

Ook nu zijn er voor de kleur nog zes mogelijkheden over, die we weer zouden kunnen onderzoeken in een tabel zoals hierboven. Maar omdat van Agatha's uitspraken "Ik heb een elektrische fiets. Isa heeft een blauwe fiets." de eerste nu sowieso onwaar is, moet haar tweede uitspraak wel waar zijn en heeft Isa dus een blauwe fiets:

Naam	Soort	Kleur
Agatha	Mountainbike	
Isa	Racefiets	Blauw
Nick	Elektrische fiets	

Er blijven dus eigenlijk nog maar twee mogelijkheden over: Agatha's fiets is zwart of groen (en die van Nick juist groen resp. zwart). Maar er blijkt hoe dan ook een probleem met de uitspraken van Nick te zijn: "Ik heb een blauwe fiets. De racefiets is zwart." Ten eerste heeft hij geen blauwe fiets, want Isa heeft die al. En ten tweede is de racefiets niet zwart, want die is blauw. Nicks uitspraken zijn allebei onwaar, maar dat is in tegenspraak met de opgave. We concluderen dat geval 2 helemaal niet kan voorkomen!

TERUGBLIK

Er was heel wat informatie in de opgave gegeven, maar veel dingen wist je ook nog niet, bijvoorbeeld of van Isa nou haar eerste of haar tweede uitspraak waar was. Wat dan bleek te werken, is een gevalsonderscheid maken: gewoon maar even aannemen dat het zo is dat haar eerste uitspraak waar is



(en haar tweede niet). En daarna natuurlijk niet vergeten ook het tweede geval te bekijken. Je kunt binnen die twee hoofdgevallen ook weer gevalsonderscheidingen maken voor Agatha en daarbinnen ook weer voor Nick, maar je hebt ook gezien dat dat soms niet eens meer nodig is, omdat het al duidelijk was welke uitspraken van hen er waar of juist onwaar waren. Als je hierboven begonnen was met het analyseren van geval 2 en daarbij inderdaad op een tegenspraak was uitgekomen, had je – zonder diep in geval 1 te duiken – al kunnen concluderen dat geval 1 de enige mogelijkheid was en dat antwoordoptie D in ieder geval waar was: in geval 1 heeft Isa namelijk een mountainbike en dat was antwoordoptie D. Om in te zien dat dit het enige goede antwoord onder de antwoordopties is, is het wel nodig om dit geval iets verder uit te werken en verdelingen te vinden die zouden kunnen voorkomen en waarvoor de andere antwoordopties niet gelden. Daarvoor had je verdeling 1 en daarnaast nog verdeling 2 of 3 nodig. Maar liefst 56% van de deelnemers was bij deze opgave op dit goede antwoord D uitgekomen, wat een behoorlijk hoge score is voor een opgave die op positie 7 van de 8 vijfkeuze-opgaven staat omdat hij verondersteld was aan de behoorlijk moeilijke kant te zijn.

EERSTE RONDE

Ben je benieuwd naar de rest van de opgaven van de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade 2019? Kijk dan op www.wiskundeolympiade.nl in het Wedstrijdarchief. En heb je zin om in januari zelf in wedstrijdverband aan zulke puzzels te werken? Geef je dan op bij je wiskundeleraar voor de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade, die van 20 t/m 30 januari 2020 plaatsvindt op alle deelnemende scholen en openstaat voor iedereen uit klas 1 t/m 5 die wel houdt van een wiskundige uitdaging!

