# SLIM CODEREN EN HANDIG DUBBEL TELLEN

**Vorige maand vond op veel scholen de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Er waren acht vijfkeuzevragen en vier open vragen, in totaal goed voor 36 punten. Op een van deze opgaven kijken we in dit artikel terug.**

■ door Quintijn Puite

De honderd beste deelnemers (uit verschillende klassen) van de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade worden uitgenodigd om volgend schooljaar, op vrijdag 12 september, mee te doen aan de tweede ronde, die op de Technische Universiteit Eindhoven wordt georganiseerd. En als je daar hoog scoort, word je uitgenodigd om een jaar lang aan de training deel te nemen, die uiteindelijk kan leiden tot een plekje in het team voor de Internationale Wiskunde Olympiade in juli 2009 in Duitsland.

We kijken hier terug op een van de opgaven uit de eerste ronde van 25 januari jongstleden; de andere opgaven kun je vinden via de website www.wiskundeolympiade.nl. Opgave A7 luidde als volgt:

De 7 letterblokjes GENEGEN worden door elkaar gehutseld. Dan krijg je bijvoorbeeld EEENNGG of GEENGEN. Hoeveel verschillende 'woorden' van lengte 7 zijn er in totaal te vormen? (Als *woord* telt elke volgorde van de 7 letters.)

Je kunt hier verschillende oplossingen voor bedenken. Een manier die geen bovenbouwwiskunde, zoals binomiaalcoëfficiënten, gebruikt, is systematisch alle mogelijkheden nagaan.

Voor de twee G-blokjes zijn er 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 mogelijkheden om op de 7 plaatsen gelegd te worden, zie onderstaande figuur. Bij elke keuze zijn er voor de twee N-blokjes 4 + 3 + 2 + 1 = 10 mogelijkheden; dan liggen de drie E-blokjes vast. In totaal zijn er dus 21 · 10 = 210 mogelijkheden; klaar.

```
G G . . . . .
G . G . . . .
G . . G . . .
      ⋮
. G G . . . .
. G . G . . .
. G . . G . .
      ⋮
. . G G . . .
. . G . G . .
      ⋮
```

Toch wordt deze methode voor ingewikkeldere setjes letterblokjes al snel ondoenlijk. Daarom gaan we op zoek naar een methode die voor elk setje letterblokjes werkt. De vraag *Hoeveel woorden kun je maken van de letterblokjes* AARDAPPELETERS beantwoord je er net zo gemakkelijk mee. We zullen een formule afleiden die je ook bij de training voor de Internationale Wiskunde Olympiade tegenkomt.

**EEN SLIM GEKOZEN CODERING** Een willekeurige volgorde van de 7 letterblokjes E, E, E, G, G, N, N noemen we een woord. Als op de 7 letterblokjes 7 verschillende letters hadden gestaan, hadden we het aantal woorden als volgt kunnen berekenen: als eerste letter van het woord zijn er 7 blokjes mogelijk; is de eerste letter eenmaal gekozen, dan kunnen we voor de tweede letter uit 6 blokjes kiezen, enzovoort. Dus zijn er dan $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ verschillende woorden te vormen. Maar wat nu als een letter op meerdere blokjes voorkomt, zoals in het geval van de opgave? Hiertoe voeren we een codering in.

Het woord GENEGEN kun je als volgt coderen: de E staat op de plekken 2, 4 en 6; de G op de plekken 1 en 5; en de N op de plekken 3 en 7. We koppelen aan GENEGEN daarom bijvoorbeeld de code (4, 6, 2; 5, 1; 3, 7), zie onderstaande figuur. En zo hoort bij EEENNGG bijvoorbeeld de code (3, 2, 1; 6, 7; 5, 4) en bij GEENGEN bijvoorbeeld de code (6, 3, 2; 5, 1; 7, 4). Kortom, we beschrijven het woord door middel van een volgorde van de getallen 1 tot en met 7, die we opdelen in brokjes van lengte 3, 2 en 2, waarbij we afspreken dat die brokjes staan voor de plekken van achtereenvolgens de

| E | | | G | | N | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 2 | 5 | 1 | 3 | 7 | → | G | E | N | E | G | E | N |
| 3 | 2 | 1 | 6 | 7 | 5 | 4 | → | E | E | E | N | N | G | G |
| 6 | 3 | 2 | 5 | 1 | 7 | 4 | → | G | E | E | N | G | E | N |

letters E, G en N. Zo'n volgorde heet ook wel een *permutatie* van de getallen 1 tot en met 7. Net als hierboven, zien we dat er in totaal $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ permutaties zijn van 7 getallen; als eerste element kun je uit 7 getallen kiezen, daarna uit 6, enzovoort.

Met elke mogelijke permutatie van de getallen 1 tot en met 7 is het nu duidelijk welk woord er wordt bedoeld. Zo zou je misschien verwachten dat je ook 5040 verschillende woorden krijgt. Maar nu moeten we goed opletten: de code (4, 6, 2; 5, 1; 3, 7) leidt bijvoorbeeld tot het woord GENEGEN, maar de code (2, 4, 6; 1, 5; 7, 3) net zo goed! We kunnen een woord blijkbaar op verschillende manieren coderen. Hoeveel permutaties leiden er nou tot het woord GENEGEN? Als ik binnen de code (4, 6, 2; 5, 1; 3, 7) de eerste drie getallen in een andere volgorde zet, verandert er niets aan mijn woord. Dat kan op 3! manieren. Ik had bovendien ook de 1 en de 5 in het tweede brokje kunnen omwisselen. En ook de 3 en de 7 in het derde brokje. In elk brokje kan ik dus de getallen permuteren, en dat kan in totaal op $3! \cdot 2! \cdot 2!$ manieren. Het is bovendien duidelijk dat we nu ook daadwerkelijk alle codes hebben gevonden die het woord GENEGEN coderen, want daarvoor is het toch echt nodig dat ik de 2, 4 en 6 op een of andere manier in het eerste brokje stop, de 1 en de 5 in het tweede en de 3 en de 7 in het derde.

Conclusie: Het woord GENEGEN wordt op precies $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$ manieren gecodeerd. Sterker nog, dit kunnen we op precies dezelfde manier voor elk woord afleiden! Als we dus alle $7! = 5040$ permutaties van de getallen 1 tot en met 7 opschrijven met daarachter het bijbehorende woord, staat elk woord precies $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$ maal in deze opsomming.

Omdat elk woord *even vaak* is geteld (namelijk 24 maal), kunnen we nu onze conclusie trekken: er zijn precies $\frac{5040}{24} = 210$ verschillende woorden te vormen met de letterblokjes E, E, E, G, G, N, N.

**Opgave 1.** Hoeveel woorden zijn er met de letters A, A, R, D, A, P, P, E, L, E, T, E, R, S?

**MULTINOMIAALCOËFFICIËNTEN** Hoeveel is $(e+g+n)^7$? Oftewel, wat krijg je als je in $(e+g+n) \cdot (e+g+n) \cdot (e+g+n) \cdot (e+g+n) \cdot (e+g+n) \cdot (e+g+n) \cdot (e+g+n)$ alle haakjes uitwerkt? Dan moeten we in elke factor de $e$, $g$ of $n$ kiezen; dat levert dus in eerste instantie $3^7$ termen op (vóór samennemen van gelijknamige termen). Je krijgt bijvoorbeeld een term $e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e = e^7$, maar ook een term $g \cdot e \cdot n \cdot e \cdot g \cdot e \cdot n$ en een term $g \cdot e \cdot e \cdot n \cdot g \cdot e \cdot n$. Merk op: die laatste twee termen lijken wel verdacht veel op onze woorden GENEGEN en GEENGEN. We kunnen beide termen schrijven als $e^3g^2n^2$.

Hoeveel termen kunnen we in totaal op deze manier samen nemen opdat we ze kunnen schrijven als $e^3g^2n^2$? Oftewel, hoeveel termen zijn er in totaal ontstaan door driemaal een $e$, tweemaal een $g$ en tweemaal een $n$ te kiezen? Dat correspondeert dus precies met de vraag *Hoeveel woorden kun je maken van de letterblokjes E, E, E, G, G, N, N?* Dus het aantal termen $e^3g^2n^2$ is na haakjes uitwerken en gelijknamige termen samennemen precies $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Hoe groot zou het aantal termen $e^2g^4n^1$ zijn? Inderdaad, $\frac{7!}{2! \cdot 4! \cdot 1!}$. En het aantal termen $e^7g^0n^0$? Dat is er maar 1, maar als we daar de formule toepassen krijg je $\frac{7!}{7! \cdot 0! \cdot 0!}$. Maar ook dat is 1 (gebruik dat $0! = 1$), dus ook hier klopt onze formule nog steeds. En hoe groot is het aantal termen $e^3g^4n^5$? Dat was een instinker; het antwoord is nul, want er worden maar 7 factoren vermenigvuldigd; die som van de exponenten moet wel 7 zijn! We concluderen dat

$$(e+g+n)^7 = \sum_{i+j+k=7} \frac{7!}{i! \cdot j! \cdot k!} e^i g^j n^k,$$

waarbij de sommatie loopt over de gehele niet-negatieve getallen $i, j, k$ (met som 7, zoals aangegeven). Het is nu een kleine moeite om dit te generaliseren naar willekeurige machten van willekeurige sommen van variabelen:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

De uitleg hierbij kunnen we kort houden: de coëfficiënt van een term $x_1^{k_1}x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$ in deze sommatie moet gelijk zijn aan het aantal woorden die bestaan uit $k_1$ letterblokjes met opschrift '$x_1$', $k_2$ letterblokjes '$x_2$', enzovoort. Net als hierboven zien we in dat er $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$ van zulke woorden zijn.

Omdat $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ een *multinomium* wordt genoemd, heten de coëfficiënten in de formule *multinomiaalcoëfficiënten*. Ze worden ook wel genoteerd als

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$$

($k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$). Het bijzondere geval $m = 2$ staat bekend als het *binomium van Newton*:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k}.$$

Lees verder op pagina 20

# MISKUNDE

**Rekenkundige missers uit kranten, tijdschriften, boeken, enzovoorts. Kom je zelf iets tegen dat geschikt is voor deze rubriek? Meld het ons via post@pythagoras.nu.**

■ door Alex van den Brandhof

## NEGEN OVER TIEN: VOLMAAKTE TIJD?

In 1989 schreef Harry Mulisch de novelle *Het beeld en de klok*. De ik-persoon, het standbeeld van Laurens Janszoon Coster, is erg nieuwsgierig en luistert daarom vol overgave naar de verhalen van de wereldse meester.

In hoofdstuk 14 legt de meester uit waarom polshorloges in reclamefolders van juweliers altijd op tien over tien staan: 'als je lacht staat je mond op tien over tien, en je armen houd je zo als je zegeviert, kijk maar naar de wielrenner die als eerste over de finish gaat. Het is de houding van de triomf.' En even verder: 'Daarmee zijn wij in staat, de stand mathematisch te verankeren. Kijk nog eens goed. De meeste horloges staan op tien over tien, maar hier staat er een op elf over tien, en deze op acht over, deze zelfs op zeven over tien. Als ik directeur van deze fabriek was, zou ik die fotograaf op staande voet ontslaan, want dat kan natuurlijk niet. Er moet één volmaakte stand zijn. Omdat de kleine wijzer de tien iets is gepasseerd, moet de grote wijzer dezelfde afstand tot de twee bewaren. Dan kom je op de volmaakte stand van negen over tien – zoals bij dit horloge hier. En nu *beweer* ik, (...,) dat de wijzers in deze volmaakte stand een hoek van 108 graden

Vervolg van pagina 19

De coëfficiënten hiervan zijn nu niets anders dan de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k,\ n-k}$. Het leuke is dat we hierboven de formule voor het multinomium (en in het bijzonder die voor het binomium) hebben afgeleid door niets anders te doen dan heel zorgvuldig te tellen: een combinatorisch bewijs voor een stelling uit de algebra!

**LOPEN IN EEN ROOSTER** Tot slot geven we nog een aardige toepassing. Een kever loopt in een driedimensionaal rooster van de oorsprong (0, 0, 0) naar (3, 2, 2). Hij loopt hierbij via de roosterlijnen en neemt een zo kort mogelijke weg. Oftewel, bij elke stap verhoogt hij één van z'n coördinaten met 1. Hier staat een mogelijke route:

$$(0,0,0) \overset{G}{\to} (0,1,0) \overset{E}{\to} (1,1,0) \overset{N}{\to} (1,1,1) \overset{E}{\to}$$

$$(2,1,1) \overset{G}{\to} (2,2,1) \overset{E}{\to} (3,2,1) \overset{N}{\to} (3,2,2)$$

Hoeveel routes kan de kever lopen?

Dit soort problemen blijken we nu in een klap ook gekraakt te hebben. Als we de assen van het rooster de E-as, de G-as respectievelijk de N-as noemen, kunnen we elke route van (0, 0, 0) naar (3, 2, 2) coderen door middel van een woord gemaakt van de letterblokjes E, E, E, G, G, N, N. Zo hoort bij bovenstaande route het woord GENEGEN.

Omgekeerd hoort bij elk woord bestaande uit 3 E's, 2 G's en 2 N'en juist weer één zo'n route van (0, 0, 0) naar (3, 2, 2). We concluderen dat het aantal routes voor de kever gelijk is aan

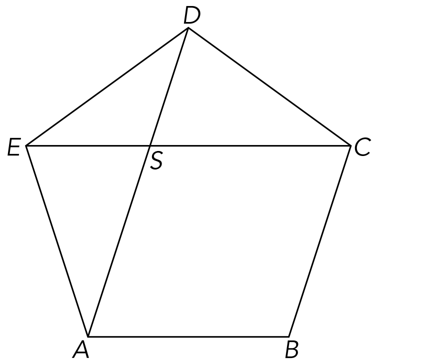
$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210,$$

en voor ons is het nu geen probleem meer om dat te generaliseren naar hoger-dimensionale roosters. Ook hier blijkt slim coderen weer de sleutel tot de oplossing te zijn!

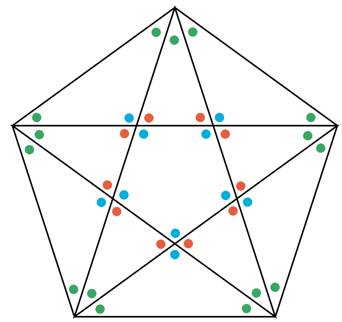
**Opgave 2.** Hoeveel kortste routes via roosterlijnen zijn er van (0, 0, 0, 0, 0) naar (3, 3, 3, 3, 3)?

**Antwoord van opgave 1**: het zijn 14 letters, netjes gesorteerd A, A, A, D, E, E, E, L, P, P, R, R, S, T; er zijn dus $\frac{14!}{3!\cdot1!\cdot3!\cdot1!\cdot2!\cdot2!\cdot1!\cdot1!} = 605.404.800$ woorden te maken.

**Antwoord van opgave 2:**
$\binom{15}{3,3,3,3,3} = \frac{15!}{(3!)^5} = 168.168.000$ ■




Figuur 1 Punt $S$ verdeelt $AD$ (en ook $EC$) volgens de gulden snede: $|SD| : |AS| = |AS| : |AD|$



Figuur 2 De groene hoeken zijn 36°, de rode 72° en de blauwe 108°

vormen.' De ik-persoon vraagt zich af waarom nu juist 108 graden; de meester noemt dit Het Geheim van Pythagoras.

In hoofdstuk 15 onthult de meester dit Geheim. Hij vertelt over de 'inwendige structuur' van een pentagon (regelmatige vijfhoek). Als je twee diagonalen tekent die elkaar snijden (Mulisch noemt het 'kruisen'), dan vinden we in het pentagon verhoudingen die voldoen aan de gulden snede, de 'esthetisch volmaakte verhouding', zie figuur 1.

Een pentagon heeft vijf hoeken van 108 graden, en ook in driehoek *DES* in figuur 1 zit een hoek van 108 graden. Teken je alle vijf de diagonalen, dan zie je een stervormige figuur, pentagram geheten. 'Als je in het kleine pentagon in het hart van de ster een tweede pentagram tekent, komt in de hele figuur de Gulden Snede zesduizend keer voor,' vertelt de meester. 'Maar wat heeft dat allemaal met de stand van negen over tien op horloges te maken?' vraagt de ik-figuur, waarop de meester antwoordt: 'Dat de volmaaktheid van die wijzerstand is gegrondvest in de volmaaktheid van het pentagram. Er komen alleen hoeken in voor van 36, 72 en 108 graden. Dat bij de horloges voor de stompe hoek is gekozen, en wel met de benen omhoog, heeft psychologische redenen waar we het al over hadden.'

**SCHIJN BEDRIEGT** Wat is er nu waar van wat Mulisch schrijft? Tegen zijn bewering dat in een pentagram alleen hoeken van 36, 72 en 108 graden voorkomen, is niets in te brengen. Zie figuur 2, reken de hoeken maar na!

Maar hoe zit het met Mulisch' theorieën over de wijzers van een horloge? Stel dat het exact negen minuten over tien is. De hoek die de grote wijzer dan maakt met de verticale symmetrie-as is gelijk aan $\frac{9}{60} \cdot 360° = 54°$. De hoek die de kleine wijzer maakt met de verticaal is $60° - \frac{9}{60} \cdot 30° = 55\frac{1}{2}°$. De wijzers staan dus niet symmetrisch ten opzichte van de verticaal en de hoek die de wijzers maken is geen 108°, maar $54° + 55\frac{1}{2}° = 109\frac{1}{2}°$.

Hoe laat is het en welke hoek maken de wijzers indien de wijzers symmetrisch staan ten opzichte van de verticaal? Stel, het is $t$ minuten over tien. De grote wijzer maakt dan een hoek van $6t°$ en de kleine wijzer maakt een hoek van $60° - \frac{1}{2}t°$. Vanwege de symmetrie moet gelden $6t = 60 - \frac{1}{2}t$, ofwel $t = 9\frac{3}{13}$, dus 9 minuten en ongeveer 13,8 seconden. De hoek tussen de wijzers is $110\frac{10}{13}°$, meer dan twee graden te veel om 'volmaakt' genoemd te mogen worden!

Ten slotte: hoe zit het als de hoek tussen de wijzers precies 108° is? Stel, het is $t$ minuten over tien; er moet dan gelden dat $6t + 60 - \frac{1}{2}t = 108$, waaruit volgt dat $t = 8\frac{8}{11}$, dus 8 minuten en ongeveer 43,6 seconden. Van symmetrie ten opzichte van de verticaal is geen sprake: de grote wijzer maakt een hoek van $52\frac{4}{11}°$ en de kleine wijzer maakt een hoek van $55\frac{7}{11}°$.

Mulisch sjoemelt terwijl hij de indruk wekt volkomen exact te zijn. Door de 'volmaakte' stand van het horloge te koppelen aan de hoeken van het 'volmaakte' pentagram, wordt van de wiskunde iets bovenmenselijks gevraagd: het gelijkpraten van dingen die niets maar dan ook niets met elkaar te maken hebben, behalve dat ze op het oog niet echt van elkaar te onderscheiden zijn. ■