Woensdag 7 juli 2010

Opgave 1. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat de gelijkheid

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Hier staat $\lfloor z\rfloor$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z.)

Opgave 2. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABC$ en zij Γ zijn omgeschreven cirkel. De lijn AI snijdt Γ nogmaals in het punt D. Zij E een punt op de boog $\widehat{BDC}$ en zij F een punt op de zijde BC zo dat

$$\angle BAF \;=\; \angle CAE \;<\; \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Zij G het midden van het lijnstuk IF. Bewijs dat de lijnen DG en EI elkaar snijden op Γ.

Opgave 3. Zij $\mathbb{N}_{>0}$ de verzameling van alle positieve gehele getallen (verschillend van nul). Bepaal alle functies $g\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ zo dat

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

een kwadraat van een geheel getal is voor alle $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.

Donderdag 8 juli 2010

Opgave 4. Zij P een punt in het inwendige van de driehoek $\triangle ABC$. De lijnen AP, BP en CP snijden de omgeschreven cirkel Γ van $\triangle ABC$ nogmaals in respectievelijk de punten K, L en M. De raaklijn aan Γ in C snijdt de lijn AB in S. Stel dat $|SC| = |SP|$. Bewijs dat $|MK| = |ML|$.

Opgave 5. In elk van de zes dozen $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ zit oorspronkelijk één munt. Er zijn twee types handelingen toegestaan:

Type 1: Kies een niet-lege doos B_j met $1 \leqslant j \leqslant 5$. Verwijder één munt uit B_j en voeg twee munten toe aan B_{j+1}.

Type 2: Kies een niet-lege doos B_k met $1 \leqslant k \leqslant 4$. Verwijder één munt uit B_k en verwissel de inhoud van de (mogelijk lege) dozen B_{k+1} en B_{k+2}.

Bepaal of er een eindige rij van zulke handelingen bestaat, zo dat daarna de dozen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leeg zijn en de doos B_6 precies $2010^{2010^{2010}}$ munten bevat. (Merk op dat $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Opgave 6. Zij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een rij van reële getallen (strikt) groter dan nul. Verder is $s \geqslant 1$ een bepaald geheel getal zo dat

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

voor alle $n > s$. Bewijs dat er positieve gehele getallen ℓ en N bestaan met $\ell \leqslant s$ en zo dat $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ voor alle $n \geqslant N$.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.