49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Woensdag 16 juli 2008

Opgave 1. Zij gegeven een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H. De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde BC snijdt de lijn (rechte) BC in A_1 en A_2. De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde CA snijdt de lijn CA in B_1 en B_2 en de cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde AB snijdt de lijn AB in C_1 en C_2.
Bewijs dat A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 op één cirkel liggen.

Opgave 2. (a) Bewijs dat voor alle reële getallen $x \neq 1$, $y \neq 1$ en $z \neq 1$ die voldoen aan $xyz = 1$ de volgende ongelijkheid geldt:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

(b) Bewijs dat er gelijkheid geldt voor oneindig veel drietallen rationale getallen $x \neq 1$, $y \neq 1$ en $z \neq 1$ die voldoen aan $xyz = 1$.

Opgave 3. Bewijs dat er oneindig veel positieve gehele getallen n zijn zodanig dat $n^2 + 1$ een priemfactor groter dan $2n + \sqrt{2n}$ heeft.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Donderdag 17 juli 2008

Opgave 4. Zij $(0,\infty)$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Vind alle functies $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ die voldoen aan

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

voor alle $w, x, y, z \in (0,\infty)$ met $wx = yz$.

Opgave 5. Laat gehele getallen $n > 0$ en $k > 0$ gegeven zijn met $k \geqslant n$ en $k - n$ even. We hebben $2n$ lampen genummerd van 1 tot en met $2n$. Elke lamp kan *aan* of *uit* zijn. In het begin zijn alle lampen uit. We bekijken rijtjes van *handelingen*: bij elke handeling wordt ofwel een lamp die aan is uit gedaan, ofwel een lamp die uit is aan gedaan.
Zij N het aantal van zulke rijtjes die uit k handelingen bestaan en die eindigen in de toestand waarin de lampen $1, \ldots, n$ aan zijn en de lampen $n+1, \ldots, 2n$ uit zijn.
Zij M het aantal van zulke rijtjes die uit k handelingen bestaan en die eindigen in de toestand waarin de lampen $1, \ldots, n$ aan zijn en de lampen $n+1, \ldots, 2n$ uit zijn, maar waarbij geen van de lampen $n+1, \ldots, 2n$ ooit werd aan gedaan.
Bepaal de verhouding N/M.

Opgave 6. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek met $|BA| \neq |BC|$. Noem de ingeschreven cirkels van de driehoeken ABC en ADC respectievelijk ω_1 en ω_2. Veronderstel dat er een cirkel ω bestaat die raakt aan de halfrechte BA voorbij A, aan de halfrechte BC voorbij C en bovendien aan de lijnen (rechten) AD en CD.
Bewijs dat de gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen van ω_1 en ω_2 elkaar snijden op ω.

Beschikbare tijd: $4\frac{1}{2}$ uur
Voor iedere opgave maximaal 7 punten