

Tweede ronde

Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 12 september 2008
Technische Universiteit Eindhoven

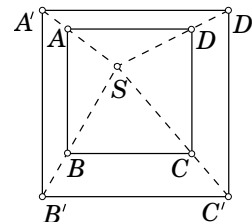


Opgaven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Bij elke opgave is niet alleen het antwoord van belang; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek. En natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel. Veel succes!

1. Gegeven is een vierkant $ABCD$ en een punt S binnen dit vierkant. Dit vierkant gaat onder puntvermenigvuldiging vanuit S met een zekere factor $k > 1$ over in een vierkant $A'B'C'D'$.

Bewijs dat de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $A'ABB'$ en $C'CDD'$ gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $B'BCC'$ en $D'DAA'$.



2. Bepaal alle paren positieve gehele getallen (m, n) waarvoor geldt

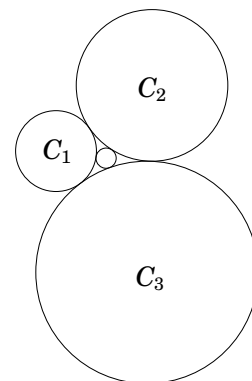
$$3 \cdot 2^n + 1 = m^2.$$

3. Gegeven zijn 756 willekeurige verschillende gehele getallen tussen 1 en 2008 (waarbij 1 en 2008 ook mee mogen doen). Deze verzameling gekozen getallen noemen we S .

Bewijs dat er twee verschillende gehele getallen a en b zijn in S waarvoor geldt dat $a + b$ deelbaar is door 8.

4. Drie cirkels C_1, C_2, C_3 met stralen van lengte respectievelijk 1, 2 en 3 raken elkaar uitwendig. In het ingesloten gebied ligt een cirkeltje C_4 dat elk van de drie gegeven cirkels uitwendig raakt.

Bereken de lengte van de straal van C_4 .



5. We spelen een spel met een rij van 2008 gehele getallen. Alle getallen in de rij zijn groter dan of gelijk aan 0. Een *zet* bestaat uit het kiezen van een getal b uit de rij, waarvan de twee buurgetallen a en c positief (dus groter dan 0) zijn. We vervangen dan a, b en c door respectievelijk $a - 1, b + 7$ en $c - 1$. Het eerste en het laatste getal van de rij mogen niet gekozen worden omdat ze maar één buur hebben.

Als we geen getal b meer kunnen vinden waarvan beide buurgetallen positief zijn, kunnen we geen zet meer doen en stopt het spel.

Bewijs dat het spel altijd op een gegeven moment stopt, met welke rij getallen we ook beginnen en welke zetten we ook doen.