



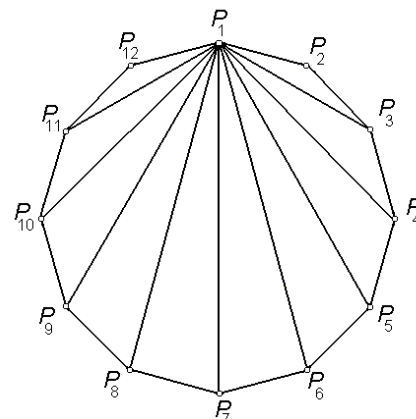
Nederlandse Wiskunde Olympiade  
tweede ronde  
vrijdag 16 september 2005

Bij elke opgave is niet alleen het antwoord van belang, ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.

Je mag geen rekenmachine gebruiken, geen formulekaart, alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.

1. Hoeveel paren getallen  $(a, b)$  met  $a < b$  kun je uit de verzameling  $1, 2, 3, \dots, 2005$  kiezen met de eigenschap dat  $a + b$  een 5-voud is?

2.  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12}$  is een regelmatige 12-hoek.  
Bewijs:



$$|P_1 P_2|^2 + |P_1 P_4|^2 + |P_1 P_6|^2 + |P_1 P_8|^2 + |P_1 P_{10}|^2 + |P_1 P_{12}|^2 = |P_1 P_3|^2 + |P_1 P_5|^2 + |P_1 P_7|^2 + |P_1 P_9|^2 + |P_1 P_{11}|^2$$

3.  $a_1, a_2, a_3, a_4$  en  $a_5$  zijn vijf verschillende reële getallen. Het aantal verschillende waarden dat de som  $a_i + a_j$  kan aannemen voor alle  $i, j$  met  $1 \leq i < j \leq 5$  noemen we  $m$ .  
Bepaal de kleinste mogelijke waarde van  $m$ .

4.  $ABCD$  is een trapezium.  
 $AB$  is evenwijdig aan  $CD$  en  $|AB| > |CD|$ .  
De diagonalen  $AC$  en  $BD$  snijden elkaar in het punt  $S$ . Het verlengde van  $AD$  snijdt het verlengde van  $BC$  in het punt  $T$ .  
Bewijs dat de lijn door  $S$  en  $T$  door de middens van de zijden  $AB$  en  $CD$  gaat.

5. Bij het flipflop spel heb je een schaakbord met op elk van de 64 velden een muntstuk met zijde "kop" of "munt" naar boven. Bij elke beurt kies je één veld en draai je de 15 munten om die in de kolom van het gekozen veld liggen en de munten die in de rij van het gekozen veld liggen. Begonnen wordt met een willekeurige situatie van munten op het schaakbord met kop of munt naar boven.

Bewijs dat het altijd mogelijk is om met geschikt gekozen beurten te komen tot een schaakbord waarop alle 64 munten met "kop" naar boven liggen.

Voorbeeld van een beurt met F3 als gekozen veld:

VOOR

8	+	-	-	+	-	+	+	+
7	+	+	-	-	-	-	+	-
6	-	-	+	-	+	+	-	-
5	+	-	-	+	+	+	-	+
4	+	-	-	+	+	-	+	-
3	+	+	-	-	-	+	+	-
2	-	-	-	+	-	+	+	+
1	+	+	-	-	+	-	+	+
	A	B	C	D	E	F	G	H

na

8	+	-	-	+	-	-	+	+
7	+	+	-	-	-	+	+	-
6	-	-	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
4	+	-	-	+	+	+	+	-
3	-	-	+	+	+	-	-	+
2	-	-	-	+	-	-	+	+
1	+	+	-	-	+	+	+	+
	A	B	C	D	E	F	G	H