Wiskunde op een schaakbord

John J. Watkins

Wiskunde op een schaakbord

John J. Watkins

Uitgeverij Veen Magazines B.V.
Postbus 256
1110 AG Diemen
www.veenmagazines.nl

Oorspronkelijke titel: Across the Board
Uitgever: © 2007, Princeton University Press

Titel: Wiskunde op een schaakbord
Auteur: John. J. Watkins
Vertaling: Ruud van de Plassche, Jan van de Westelaken
Tekstredactie: Barbara van Male
Ontwerp en opmaak: t4design
Cover-illustratie: Dimitri Karetnikov
Overige illustraties: Arden Rzewnicki
Druk: Koninklijke Wöhrmann, Zuthpen

ISBN-13: 9789085711728
NUR: 450/910

Voor Laurel

INHOUD

VOORWOORD

> In het spel kun je uit twee genoegens kiezen –
> Het ene is winnen, het andere verliezen.
>
> *Byron*

Allerlei soorten spelletjes namen in mijn kindertijd een belangrijke plaats in. Het geeft een bepaald gevoel van welbehagen, alsof je lekker ergens in een hoekje zit met een echt goed boek, wanneer je je uit de echte wereld terugtrekt in een eigen rijk waar de regels kristalhelder en de doelen vastomlijnd zijn. In een zomer, toen ik nog heel jong was, leerde ik schaken van mijn oudere broer Reed. Ook toen al oefende het schaakspel een speciale, lichtelijk mysterieuze aantrekkingskracht op mij uit, en ik dwong alle kinderen in mijn buurt om lid te worden van mijn nieuw opgerichte schaakclub. Geleidelijk nam mijn enthousiasme voor het schaakspel echter af, en op de middelbare school raakte ik in andere dingen geïnteresseerd.

Maar op een dag, toen ik 13 of 14 was, kwam mijn broer thuis van de universiteit en liet me een nummer zien van de *Scientific American* met daarin een column van Martin Gardner die *Mathematical Games* heette. Reed wist dat ik van wiskunde hield en dacht dat ik deze maandelijkse column wel interessant zou vinden. Het was een schot in de roos. Net als voor veel andere wiskundigen van die tijd zijn Gardners artikelen een voortdurende bron van inspiratie voor mij geweest. Zoals de details van het klaslokaal waarin ik voor het eerst hoorde dat president Kennedy was neergeschoten me nog levendig voor de geest staan, zo herinner ik me ook nog exact de plaats waar ik zat toen ik als promovendus voor het eerst Gardners artikel over *RSA*-codes las. Een van de dingen die Gardner ons leert, is dat de wiskunde overal is: zelfs op het schaakbord, een onderwerp waar hij keer op keer op terugkwam.

Vele jaren later, toen ik me al lange tijd had beziggehouden met serieuzere wiskundige onderwerpen zoals ringtheorie en later grafentheorie, woonde ik in de zomer een internationale conferentie over grafentheorie bij, die elke vier jaar in Kalamazoo, Michigan, werd gehouden. Ik had het jaar daarvoor juist een nieuw doctoraalcollege over *onderzoek in de grafentheorie* gegeven aan Colorado College en was op zoek naar een nieuw onderwerp om het komende jaar in de reprise van die cursus op te nemen. Het bleek een moment te zijn waarop diverse lijnen in mijn leven samenkwamen. Ik ging naar een bijeenkomst waar gastspreker Stephen Hedetniemi van Clemson University een lezing hield over *schaakbordproblemen*. Binnen een paar minuten wist ik het volmaakte onderwerp voor mijn doctoraalcollege. Aan het eind van zijn lezing besefte ik dat het eenvoudige wit- en zwartgeblokte voorwerp dat we het schaakbord noemen een schat aan wiskundige ideeën en problemen herbergt. Ik had eindelijk ontdekt wat Martin Gardner de hele tijd al had geweten: de wiskundige schaakbordproblemen waarover hij zo veelvuldig in zijn column schreef, waren juist zo leuk omdat ze uiteindelijk over serieuze wiskundige problemen gingen.

Mijn voornaamste doel met dit boek is dan ook je deelgenoot te maken van dit plezier door je een zo breed mogelijk overzicht te geven van alle wiskunde die in de loop van de jaren is ontdekt tussen de velden van het nederige schaakbord. Ik veronderstel aan jouw kant geen enkele voorkennis of ervaring – noch in wiskunde noch in schaken. Ik zal mijn uiterste best doen je alles te vertellen wat je moet weten! Wel hoop ik dat jij op jouw beurt ook op ontdekkingsreis gaat en probeert om de meeste, of in elk geval sommige, van de problemen op te lossen die ik kwistig door de tekst heb gestrooid, en waarvan de oplossingen aan het eind van elk hoofdstuk staan.

HOOFDSTUK 1

Inleiding

Wij zijn niet meer dan een voorbijtrekkende stoet
Van magische schimmen die komen en gaan
Rondgaand met deze zonverlichte lantaarn
Te middernacht voor de meester van het spel;

Krachteloze stukken van het spel dat hij speelt
Op het schaakbord van dag en nacht;
Her- en derwaarts verplaatst, schaak zet, en slaat;
en een voor een terug in het doosje legt.

Omar Khayyám, Rubáiyát

Dit boek gaat over het schaakbord. Nee, niet over *schaken*, maar over het bord zelf. Het schaakbord levert het speelveld voor allerlei spelvormen, oude en nieuwe: schaken in al zijn varianten overal ter wereld, dammen, go, snakes and ladders en zelfs het woordspel scrabble. Speelborden voor deze spelvormen hebben allerlei afmetingen: 8×8 voor schaken, 8×8 en 10×10 voor dammen (afhankelijk van waar ter wereld je je bevindt), 10×10 voor snakes and ladders, 15×15 voor scrabble, 18×18 voor go en zelfs niet-vierkante borden zoals 4×8 en 2×6 voor de Mankala-spelen Bau en Owari, twee spelen die overal in Afrika onder verschillende namen en op allerlei manieren worden gespeeld.

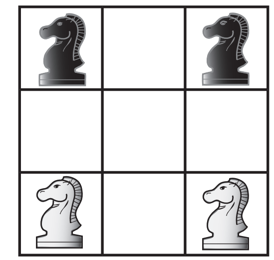
Bij sommige bordspelen hebben de afzonderlijke velden geen speciale kleur en zijn ze allemaal hetzelfde, maar bij andere spelen kan de kleur van de velden juist heel belangrijk zijn. De beste voorbeelden daarvan zijn de afwisselend zwarte en witte of zwarte en rode velden bij schaken of dammen. In de jaren dertig en veertig van de vorige eeuw heeft Alfred Butts jarenlang geëxperimenteerd met de veldkleuren voor het spel dat we nu kennen als scrabble. Daarbij worstelde hij met de vraag waar de velden voor de dubbele en driedubbele woordwaarde precies moesten komen, wat hun kleur moest zijn en hoeveel van elk type hij eigenlijk wilde. Ook wij zullen ontdekken dat de ingenieuze inkleuring van de velden van een op zich doodgewoon schaakbord tot verrassende resultaten kan leiden. Evenals andere spelen zijn bordspelen in de regel een metafoor voor het leven zelf. Schaken gaat natuurlijk over oorlog, over het verslaan van de vijand en het beschermen van de eigen koning; go gaat over territoriale expansiedrang; snakes and ladders is een stichtelijk spel dat kinderen leert het nirvana te bereiken. In de twee kwatrijnen uit *Rubáiyát* waarmee ik dit hoofdstuk ben begonnen zag Omar Khayyám in zulke spelen een weerspiegeling van ons leven als eenvoudige ‘pionnen’ in een spel dat gespeeld werd door de ‘meester van het spel’, een thema dat Shakespeare driehonderd jaar later weer oppikte in *As you like it*, het stuk waarmee hij mogelijk het Globetheater in 1559 heeft geopend:

> De wereld is een schouwtoneel,
> En alle mannen en vrouwen zijn maar spelers:
> Zij komen op en gaan weer af;
> En elke man speelt vele rollen,
> In de zeven fasen van zijn leven.

Nog steeds legt dit idee een beklemmend gewicht in de schaal, in een tijd en vooral een samenleving als de onze, waarin de problematische notie van de vrije wil gemeengoed is geworden. Maar dit boek gaat niet over zulke rollenspelen en al helemaal niet over de culturele betekenis van de spelletjes die wij mensen spelen. Het gaat over het speelbord zelf, het simpele raster van vierkante velden dat zo kenmerkend is voor spelen die overal ter wereld worden gespeeld, en, wat nog belangrijker is, over de wiskundige eigenaardigheden die schuilgaan achter zo’n ogenschijnlijk simpele structuur. Laten we beginnen met een probleemopgave.

Het probleem van Guarini

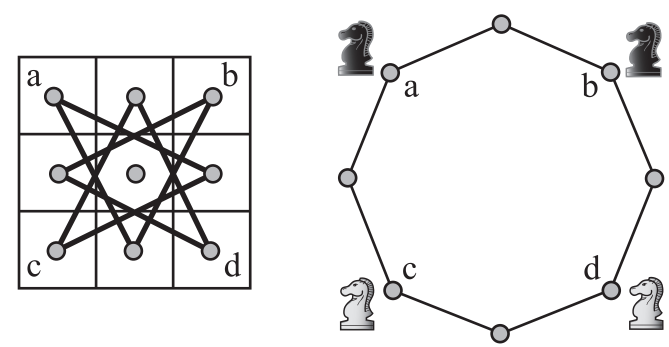
Het oudste schaakbordprobleem dat ik ken stamt uit 1512, dus bijna 500 jaar geleden. Deze opgave staat bekend als het *probleem van Guarini* en gaat over twee paarden, twee witte en twee zwarte, in de



Afbeelding 1.1 | Het probleem van Guarini: verwissel de paarden.

vier hoeken van een klein schaakbordje van 3 × 3 velden. De witte en de zwarte paarden willen van plaats ruilen. Hun beginstelling is weergegeven in afbeelding 1.1. Een paard kan zich op een schaakbord verplaatsen door twee velden in horizontale of verticale richting te bewegen en vervolgens één veld naar links of naar rechts te gaan. Omdat in dit specifieke probleem elk paard maar twee mogelijke zetten heeft vanuit elke positie, is het probleem gemakkelijk op te lossen, zelfs door het maar gewoon uit te proberen. Toch is het iets lastiger dan je op het eerste gezicht zou zeggen, zodat ik je aanraad het eerst zelf op te lossen voordat je verder leest.

Als je de oplossing hebt gevonden, heb je de onderliggende basisstructuur ervan ongetwijfeld opgemerkt. Merk op dat deze vrij eenvoudige structuur op twee dingen is gebaseerd: de geometrie van het bord zelf in combinatie met de specifieke wijze waarop een



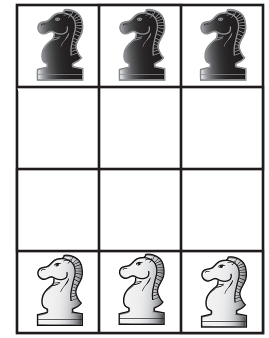
Afbeelding 1.2 | Het schaakbord negeren en het diagram uitvouwen.

schaakpaard mag zetten. In afbeelding 1.2 is links de structuur van de mogelijke paardzetten eerst expliciet aangegeven met lijnen die elke twee velden verbinden waartussen een paard zich kan bewegen. Het diagram kan vervolgens worden 'uitgeklapt' (rechts in afbeelding 1.2), waarbij de onderliggende structuur van het diagram meteen duidelijk wordt. Wat er links nogal complex uitziet, blijkt rechts uit slechts een enkele cirkelgang te bestaan, waarmee de oplossing van ons probleem volledig duidelijk is. Om van plaats te kunnen ruilen hebben de paarden geen enkele keus. Ze moeten langs deze cyclus bewegen, allemaal in dezelfde richting (met de klok mee of tegen de klok in), totdat hun posities precies zijn omgedraaid. Deze grafische oplossing moet natuurlijk nog worden terugvertaald naar het oorspronkelijke bord van 3×3, maar deze laatste stap spreekt verder voor zich.

Guarini's probleem bevalt mij onder meer omdat het zo oud is, maar ook omdat het een heel aardige illustratie is van de manier waarop mathematische abstractie de verwarrende details van een probleem kan wegfilteren en ons met zachte hand naar de oplossing kan leiden. Bij het probleem van Guarini voorkomt het eerste abstractieniveau dat we steeds de merkwaardige wijze waarop een paard beweegt in het achterhoofd moeten houden: we tekenen simpelweg lijnen op het bord om die zetten mee aan te duiden. Dankzij die kunstgreep kunnen we de schaakkant van het verhaal meteen achter ons laten. Het volgende abstractieniveau doet ons ook het bord zelf helemaal vergeten, zodat we ons volledig op het diagram kunnen richten. Met het laatste abstractieniveau elimineren we de warboel van het diagram door het simpelweg uit te klappen.

Dit algemene proces van de omzetting van een probleem in een diagram blijkt erg nuttig te zijn. Er is een compleet deelgebied van de wiskunde, de *grafentheorie*, tot ontwikkeling gekomen dat is gewijd aan de bestudering van de eigenschappen en het gebruik van zulke diagrammen (grafen). Dit boek is eigenlijk een boek over vermomde grafen. In de regel worden expliciete grafen, zoals in afbeelding 1.2, buiten beeld gehouden tijdens onze voorstelling, maar je mag erop vertrouwen dat ze altijd in de buurt zijn en zomaar de kop kunnen opsteken als de noodzaak zich voordoet.

Probleem 1.1 | In afbeelding 1.3 staan nu zes paarden, drie witte en drie zwarte, tegenover elkaar op een schaakbord van 4×3. Zoek het minimale aantal zetten dat nodig is om deze paarden van plek te laten verwisselen. Deze variant op Guarini's probleem verscheen in het decembernummer van 1979 van *Scientific American*.



Afbeelding 1.3 | Verwissel de paarden.

De oplossing werd in het eerstvolgende nummer gepubliceerd. In dit boek kun je de oplossingen aan het eind van elk hoofdstuk vinden, als je wilt.

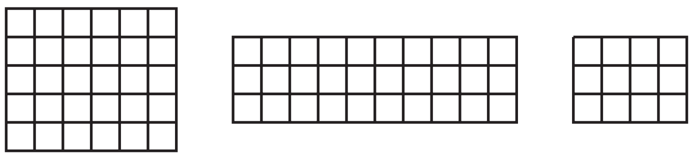
Het probleem van de paardenrondgang

Omdat we nu toch weten hoe paarden zich over een schaakbord verplaatsen en ons in een probleem daarover hebben verdiept, gaan we er nog even mee door. Merk op dat in het probleem van Guarini het middelste veld van het 3×3-bord ontoegankelijk is voor de vier paarden, maar dat verder elk paard elk veld van het bord precies één keer kan aandoen en naar zijn uitgangspositie kan terugkeren door enkel het complete circuit van het diagram in afbeelding 1.2 te doorlopen. Maar hoe zit dat bij een groter bord, zeg 4×4 of 8×8? Kan een paard dan het hele bord rondgaan, dat wil zeggen elk veld precies één keer bezoeken en weer terugkeren bij af? Het antwoord is: soms *wel*, soms *niet*.

De algemene vraag op welke schaakborden een rondgang (of pad) van het paard mogelijk is, staat bekend als het *probleem van de paardenrondgang*. Dit beroemde probleem kent een lange en rijke historie. Het is bijna even oud als het schaken zelf, dat in de zesde eeuw in India is ontstaan, en zal een van de hoofdonderwerpen zijn van dit boek.

Voordat je verder leest, zou je het volgende probleem eens kunnen proberen. Het belangrijkste kenmerk van een paardenrondgang is dat het paard elk veld op het bord maar één keer mag aandoen. Een rondgang kan *gesloten* zijn, waarbij het paard weer op zijn uitgangspositie terugkeert, of *open*, waarbij het paard op een ander veld eindigt dan waarop het van start is gegaan. Tenzij anders aangegeven, betekent het woord ‘rondgang’ in dit boek altijd een gesloten rondgang.

Probleem 1.2 | De kleinste schaakborden waarop een paardenrondgang uitvoerbaar is, zijn borden van 5 bij 6-velden en van 3 bij 10-velden. Zoek een rondgang voor elk van deze borden. Het kleinste bord waarop een gesloten rondgang mogelijk is, is het 3×4-bord. Vind een open rondgang voor dit bord.

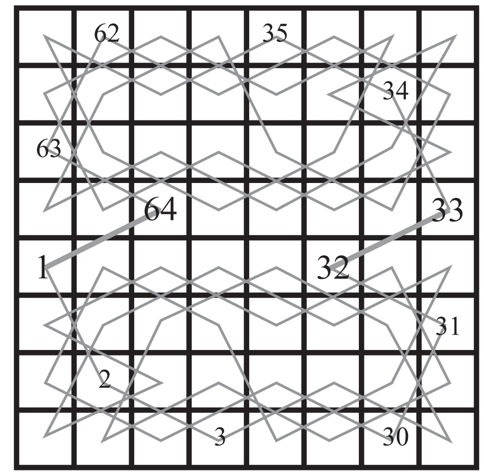


Afbeelding 1.4 | Zoek gesloten rondgangen voor het 5×6- en 3×10-bord; vind een open rondgang voor het 3×4-bord.

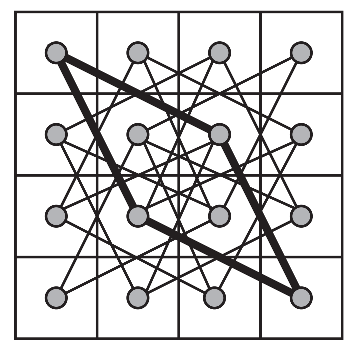
Leonard Euler, wellicht de meest productieve wiskundige die ooit geleefd heeft, heeft zich intensief beziggehouden met het probleem van de paardenrondgang. Een bijzonder aantrekkelijke rondgang voor het 8×8-bord, door Euler uitgevoerd in 1759, is te zien in afbeelding 1.5. Wat deze rondgang zo bijzonder maakt, is dat Euler eerst een open rondgang uitvoert op de onderste helft van het bord, waarbij hij start op veld 1 en eindigt op veld 32. Vervolgens herhaalt hij dezelfde rondgang op symmetrische wijze voor de bovenste helft van het bord, waarbij hij start op veld 33 en eindigt op veld 64. Merk op dat Euler het begin en het einde van die twee open halfrondgangen heel nauwkeurig heeft gekozen, zodanig dat ze gecombineerd kunnen worden tot een rondgang over het hele bord.

Deze rondgang van Euler vertelt ons iets heel nuttigs over het probleem van de paardenrondgang: we weten nu in ieder geval zeker dat op het 8×8-bord een paardenrondgang mogelijk is. Anderzijds weten we inmiddels ook dat niet *alle* borden over een rondgang beschikken. We hebben bijvoorbeeld gezien dat het 3×3-bord geen rondgang kent, om de eenvoudige reden dat het centrumveld niet toegankelijk is. Een interessanter, en veel verrassender, voorbeeld is het 4×4-

bord. Een snelle blik op het diagram in afbeelding 1.6 laat zien waarom een paardenrondgang op dit schaakbord onmogelijk is.



Afbeelding 1.5 | Eulers paardenrondgang.



Afbeelding 1.6 | Waarom een 4×4-bord geen rondgang heeft.

De twee vetgedrukte verbindings*lijnen* (in de grafentheorie ook wel randen of kanten genoemd) die beginnen in de linkerbovenhoek, duiden de enige manier aan waarop een paard dat hoekveld kan bereiken of verlaten. Daarom *moeten* beide vetgedrukte lijnen deel uitmaken van elke rondgang over het hele bord. Om dezelfde reden moeten de twee vetgedrukte lijnen vanuit de rechterbenedenhoek eveneens deel uitmaken van elke rondgang over het hele bord. Maar we kunnen eenvoudig vaststellen dat die vier vetgedrukte lijnen een gesloten rondgang vormen van slechts vier velden, wat inhoudt dat ze niet tevens onderdeel kunnen zijn van een grotere rondgang over het hele bord.

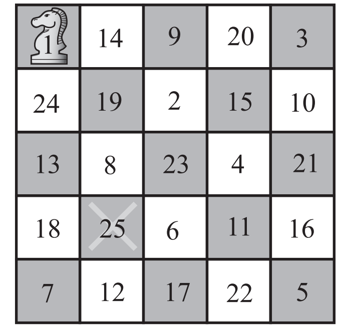
Vanwege dit onvermijdbare conflict is een volledige rondgang dus niet mogelijk. Zijn er nog andere schaakborden waarop een paardenrondgang onmogelijk is? Willen we die vraag beantwoorden, dan helpt het als we de velden van ons schaakbord een kleur geven, zoals we hieronder zullen zien.

Schaakborden van kleuren voorzien

Omar Khayyám gebruikte in de eerder geciteerde passage uit *Rubáiyát* het zwart-witgeblokte patroon van het schaakbord als metafoor voor nachten en dagen, waarmee hij een verontrustend gevoel opriep van de eindeloze cyclische herhaling van het leven. Tegenwoordig zien wij het geblokte dambordpatroon zo vaak toegepast als decoratie – op taxi's, op tafelkleden in Italiaanse restaurants, op tegelvloeren, op de finishvlag bij autoraces – dat het ons ronduit verbaast hoe bijzonder handig dat patroon kan zijn voor zuiver wiskundige doeleinden. Dit is een thema dat we keer op keer zullen tegenkomen. Maar laten we nu de gekleurde vakken gebruiken om er *oneindig* veel meer schaakborden mee te vinden waarop met geen mogelijkheid een paardenrondgang valt uit te voeren!

Tot nu toe hebben we nog niet de moeite genomen om de velden van onze schaakbordvoorbeelden van een kleur te voorzien. Maar kijk nu eens naar het 5 × 5-bord in afbeelding 1.7, waarvan we de velden op de gebruikelijke manier hebben ingekleurd. Het belangrijkste wat opvalt, is dat een paard op dit bord zich altijd verplaatst van een veld van de ene kleur naar een veld van de andere kleur. Ga dit zelf maar eens na. Een paardenrondgang wisselt dus noodzakelijkerwijs af tussen zwarte en witte velden; en dus moet een paardenrondgang bestaan uit een even aantal zwarte en witte velden. Maar het 5 × 5-bord heeft geen even aantal zwarte en witte velden! Ons 5 × 5-bord heeft 12 witte en 13 zwarte velden. En dus is een rondgang op het 5 × 5-bord onmogelijk.

Hetzelfde argument gaat uiteraard op voor elk 'oneven' schaakbord, zoals een 13 × 7-bord, waar beide dimensies oneven zijn, simpelweg omdat in dat geval het totale aantal velden ook oneven is en het aantal zwarte velden niet gelijk kan zijn aan het aantal witte velden. Er zijn dan ook oneindig veel schaakborden waarop een paardenrondgang niet mogelijk is.



Afbeelding 1.7 | Een open rondgang op het 5 × 5-bord.

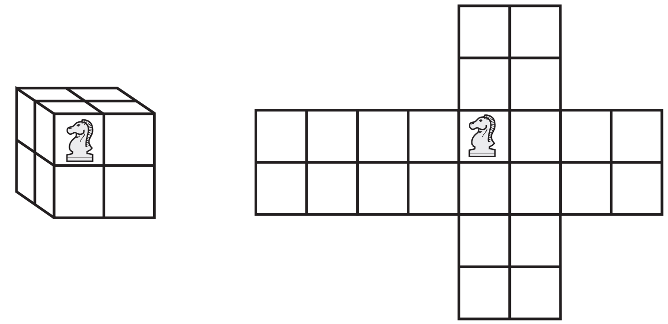
Spelen op andere oppervlakken

Misschien heb je zelf al bedacht dat, alleen omdat een gesloten rondgang op een 5 × 5-bord niet mogelijk is, dat nog niet hoeft te betekenen dat er geen open rondgang te vinden is. Waarom zou een open rondgang niet kunnen beginnen op een zwart veld en ook weer op een zwart veld eindigen, en zo 13 zwarte velden afwisselen met 12 witte? Dat kan inderdaad! Een voorbeeld van zo'n rondgang is weergegeven in afbeelding 1.7. Deze specifieke rondgang suggereert een natuurlijke uitbreiding van het probleem van de paardenrondgang, of althans iets wat natuurlijk overkomt op iemand die fanatiek videospelletjes speelt. Wat, als we de regels voor het paard aanpassen en we het van de onderkant van het bord laten verdwijnen en weer tevoorschijn laten komen aan de bovenkant, precies zoals dat in sommige videogames gaat? Of als we het paard aan de ene zijde van het bord laten verdwijnen om het meteen weer aan de andere zijde op te laten duiken? Dat is niet een idee dat als vanzelf zou zijn opgekomen bij Euler in het midden van de achttiende eeuw toen hij zich met de paardenrondgang bezighield, maar voor ons is er niets vreemds aan. Met die nieuwe, computergestuurde vrijheid zou het arme paard dat voorheen vastzat op veld 25 in afbeelding 1.7 nu in één zet kunnen terugkeren naar veld 1 en zo de rondgang sluitend maken. In dit bijzondere geval zou een wiskundige kunnen opmerken dat we aan het schaken zijn op een *platte torus*. Zoals we later zullen zien, is dat eigenlijk hetzelfde als schaken op het oppervlak van een ring (of zwemband)! Omdat we hierna paardenrondgangen gaan onderzoeken op een grote verscheidenheid aan vreemde oppervlakken zoals de torus, gaan we eerst wat warming-up doen aan de hand van het volgende probleem.

Probleem 1.3 | Zoek een paardenrondgang op het oppervlak van een kubus van $2 \times 2 \times 2$. Deze opgave behoeft enige uitleg. Om te beginnen heeft deze kubus slechts vier velden op elke zijde, wat betekent dat een paard over de randen van de zijden moet kunnen springen naar een andere zijde. We gaan er dus vanuit dat dit probleemloos kan. De mogelijke paardzetten zijn veel beter voor te stellen met een echte kubus in je handen, zoals de bekende *kubus van Rubik*, plus een viltstift waarmee je de zetten aangeeft. Een redelijk alternatief is het gebruik van een opengeklapt diagram van de kubus (zie afbeelding 1.8) als visueel hulpmiddel. Voor de duidelijkheid moeten we ook heel precies afspreken waaruit een paardzet bestaat. Eerder heb ik die zet omschreven als 'door twee velden in horizontale of verticale richting te bewegen en dan één veld naar links of naar rechts te gaan'. Op een plat bord is dat hetzelfde als 'één veld in de ene richting bewegen en vervolgens twee velden naar links of rechts gaan'. Maar op een kubus van $2 \times 2 \times 2$ blijken die twee 'zetten' niet altijd op hetzelfde neer te komen. Omdat we niet echt kunnen bepalen welke van die twee 'zetten' de *echte* paardzet is, beslis ik arbitrair dat je ze allebei mag gebruiken. Dat betekent (ga maar na) dat een paard vanuit elke startpositie tien mogelijke zetten tot zijn beschikking heeft. Met zoveel mobiliteit kan dit probleem niet moeilijk op te lossen zijn!

Het dominoprobleem

We hebben zojuist vastgesteld dat we het standaardpatroon van afwisselend zwarte en witte velden kunnen gebruiken om aan te tonen dat op schaakborden met oneven afmetingen een paardenrondgang onmogelijk is. Hier zie je een slimme en heel bekende opgave die ook de bruikbaarheid van gekleurde velden illustreert. Voor dit probleem hebben we dominostenen nodig. Misschien ken je de opgave al, maar hij kan uitstekend dienstdoen als inleiding op een omvangrijke categorie van interessante geometrische problemen. Voor ons is een



Afbeelding 1.8 | Een opengevouwen kubus van 2 bij 2 bij 2.

dominosteen slechts een rechthoek van 1 bij 2. Het aantal ogen op de steen is niet van belang, het gaat ons alleen om de rechthoekige vorm van 1 bij 2. Als de grootte van onze dominostenen precies overeenkomt met die van twee aangrenzende velden op ons schaakbord, dan is meteen duidelijk dat we een 8×8-bord kunnen bedekken met 32 dominostenen. Geen probleem!

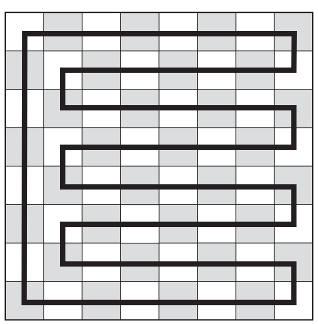
En dan nu het overbekende *dominoprobleem*: verwijder twee diagonaal tegenover elkaar liggende hoekvelden van een 8×8-bord; kun je de resterende 62 velden van het schaakbord afdekken met 31 dominostenen? Het lijkt alsof dat moet kunnen, want 2 maal 31 is 62, maar ik kan je niet aanraden er al te veel tijd in te steken – een beetje wel, natuurlijk – omdat je missie gedoemd is te mislukken.

Probeer je in plaats daarvan het schaakbordpatroon voor de geest te halen, of, nog beter, kijk naar een echt schaakbord. Je hoeft alleen maar op te merken dat de beide diagonaal tegenover elkaar gelegen hoekvelden (de verwijderde velden) van dezelfde kleur zijn! Dus blijven er 32 velden van de ene, maar slechts 30 velden van de andere kleur over. En omdat een dominosteen een wit en een zwart veld afdekt, is het onmogelijk de resterende 62 velden met 31 dominostenen af te dekken.

In mijn ogen is het dominoprobleem zo'n geslaagd raadsel, omdat mensen zich vooral concentreren op de nogal bizarre geometrische vorm van het bord zodra de twee hoekvelden zijn verwijderd, zodat ze het probleem geometrisch benaderen. Daarnaast is het blokpatroon zo'n alledaags verschijnsel dat het ons nauwelijks meer opvalt en we geen acht slaan op de kleuren van de velden. Maar wat als we opnieuw beginnen en bijvoorbeeld de linkerbovenhoek en de rechterbovenhoek van het bord verwijderen? Dan is het, zoals we al dachten, een eitje om het resterende bord af te dekken met 31 dominostenen. En wat als we het iets moeilijker maken en een willekeurig wit veld en een willekeurig zwart veld van het bord verwijderen? Zijn we dan nog steeds in staat het resterende bord af te dekken met 31 dominostenen? Gelukkig is het antwoord *ja*. Met andere woorden: de volgende opmerkelijke stelling is waar.

Stelling 1.1 (Stelling van Gomory) | *Als men ergens van een schaakbord van 8 bij 8 velden één zwart veld en één wit veld weghaalt, kan het resterende bord worden afgedekt met 31 dominostenen.*

Het is verrassend eenvoudig om het bewijs te leveren voor deze stelling. Daarvoor moeten we eerst terugkeren naar de idee van een rondgang op een schaakbord. Maar in dit geval gaan we kijken naar een rondgang van de toren in plaats van het paard. Een toren kan zich horizontaal of verticaal verplaatsen naar elk gewenst veld. Voor onze doeleinden (het gaat ons tenslotte om rondgangen en het bezoeken van velden) is het handig om de toren steeds één veld tegelijk te verplaatsen. Met andere woorden, als een toren zich over een rij of lijn beweegt, 'bezoekt' hij onderweg elk veld. Gewapend met deze kennis kun je vast een torenrondgang vinden op het 8 × 8-bord. Neem even de tijd om dat te doen. Je komt waarschijnlijk uit op iets dat lijkt op de torenrondgang in afbeelding 1.9.
Met behulp van de torenrondgang in afbeelding 1.9 kunnen we eenvoudig het beloofde bewijs leveren voor Gomory's stelling. Vergeet even helemaal dat het zich op een schaakbord afspeelt en concentreer



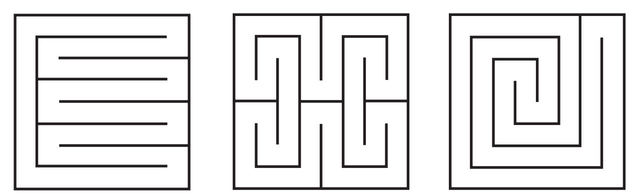
Afbeelding 1.9 | Een torenrondgang op het 8 × 8-bord.

je alleen op de rondgang zelf. Het is slechts een hele lange en grote keten waarbij de toren vrolijk van veld naar veld huppelt: *zwart veld, wit veld, zwart veld, wit veld, zwart veld, wit veld*, totdat de toren uiteindelijk weer aankomt op zijn startveld. Als er nu onderweg ergens een zwart veld wordt verwijderd, blijft de keten een geheel, maar is nu open met een wit veld aan het begin en aan het eind. Als er in het resterende deel onderweg ergens een wit veld wordt verwijderd, bestaat het resultaat uit twee delen (tenzij we natuurlijk een van de twee witte uiteinden verwijderen, maar dan wordt het bewijs nog eenvoudiger). We zien nu dat elk van beide delen een wit veld heeft aan het ene einde en zwart veld aan het andere einde. Dus kan elk afzonderlijk deel worden bedekt met een reeks dominostenen, waarbij elke steen een wit en een zwart veld bedekt. Het bewijs is daar.

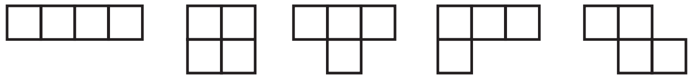
Als deze redenering niet meteen duidelijk voor je is, denk dan eens aan een halssnoer met 32 zwarte en 32 witte kralen in afwisselende volgorde. Haal één zwarte kraal uit het snoer en stel je het resultaat voor; haal vervolgens ook een witte kraal weg en stel je de twee resterende delen voor. Dat is alles.

Voor de ontsluiting van Gomory's stelling hebben we twee sleutels gebruikt: allereerst het bekende blokkenpatroon van het schaakbord met de witte en zwarte velden, en ten tweede de bijzonder prettige omstandigheid dat een schaakbord een torenrondgang kent. Afbeelding 1.10 laat verschillende aantrekkelijke torenrondgangen van het 8 × 8-bord zien in een iets andere vorm (waaronder ook die van afbeelding 1.9, helemaal links). Je kunt nog enkele andere rondgangen proberen te vinden, er zijn er genoeg.

Verderop in dit boek komen we terug op dit onderwerp en zullen we schaakborden bedekken met 'ominostenen' van allerlei afmetingen: monomino, domino, tromino, tetromino, pentomino enzovoorts. Hier kijken we nog even naar een ander probleem met 'ominostenen'.



Afbeelding 1.10 | Drie torenrondgangen van het 8 × 8-bord.



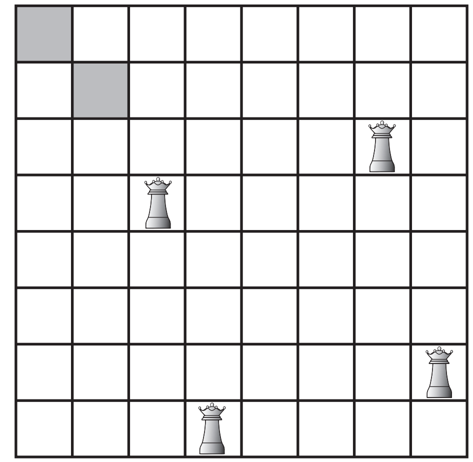
Afbeelding 1.11 | De vijf tetromino's.

Probleem 1.4 | In afbeelding 1.11 zien we vijf tetromino's, dat wil zeggen vijf figuren die elk steeds vier velden van een schaakbord afdekken. Merk op dat twee ervan er anders uitzien als je ze omdraait, maar ze worden ook dan geacht dezelfde tetromino te zijn. Als je uitgaat van zestien rechte 1×4-tetromino's, kun je het 8×8-bord er gemakkelijk mee bedekken. Hetzelfde geldt voor het vierkante 2×2-tetromino. De vraag is nu met welke van de andere drie tetromino's datzelfde kan worden gedaan, dat wil zeggen met zestien exemplaren van dezelfde tetromino. Een variant op dat probleem: kun je een 4×5-bord afdekken met elk van de vijf tetromino's? En een 2×10-bord? Vergeet niet dat je de 'ominostenen' ook mag omdraaien.

Dominantie

Hierboven hebben we gekeken naar een bepaalde vorm van 'dekking' van schaakborden, waarbij een schaakbord letterlijk werd afgedekt door verschillende geometrische vormen zoals domino's en tetromino's. Ik wil nu een heel andere soort 'dekking' van een schaakbord in onze overwegingen betrekken. We beginnen onze bespreking met dames. De dame is verreweg het sterkste stuk bij het schaken, omdat zij de kracht van de toren, die over elke willekeurige afstand beweegt in horizontale of verticale richting, combineert met de kracht van de loper, die over elke willekeurige afstand beweegt in diagonale richting. Afhankelijk van het uitgangsveld, kan een enkele dame tussen de 22 en 28 velden van het schaakbord *dekken* of *beheersen*. Dat lijkt tenminste ergens op.

De vier dames in afbeelding 1.12 beheersen samen zelfs vrijwel het hele bord, alleen de donkere velden onttrekken zich nog aan hun invloedssfeer. (Ik kan niet nalaten er hier even op te wijzen dat als het bord van afbeelding 1.12 zich op een vlakke torus bevond – je weet wel, zodat de dames aan de ene zijde van het bord kunnen verdwijnen om aan de andere zijde weer op te duiken – de twee donkere velden al gedekt zouden zijn! Zie je hoe? Met andere woorden, het hele bord zou beheerst worden door slechts deze vier dames. Einde



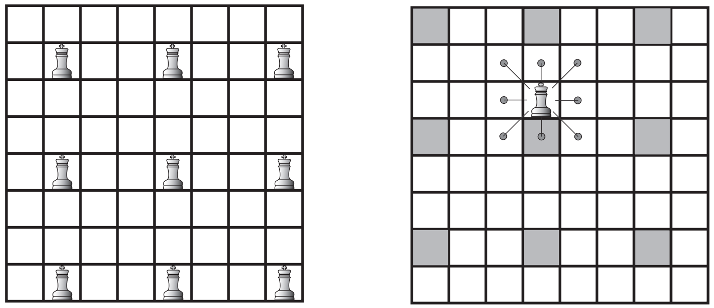
Afbeelding 1.12 | Vier dames bestrijken bijna het hele bord.

van de onderbreking, we gaan weer terug naar normale schaakborden.)

Omdat er maar twee velden ongedekt zijn in afbeelding 1.12, kunnen we eenvoudig een vijfde dame op het bord plaatsen zodanig dat het hele bord door die vijf dames wordt bestreken of beheerst. Helaas is het helemaal niet eenvoudig te bewijzen dat er daadwerkelijk vijf dames nodig zijn om het 8×8-bord volledig te beheersen. Maar het ís wel zo. Verderop in het boek komen we terug op deze en andere kwesties met betrekking tot dames.

Ondertussen gaan we ons bezighouden met een vraag die veel gemakkelijker te beantwoorden is: hoeveel koningen heb je nodig om een 8×8-bord te beheersen? De koning kan net als de dame in alle richtingen bewegen, maar heeft een veel beperktere actieradius omdat hij alleen naar een aangrenzend veld mag gaan. Een koning kan dus ten hoogste maar negen velden bestrijken, namelijk het 3×3-blokje van het bord waar hij midden in staat. We kunnen gemakkelijk zien dat je dan met negen koningen het hele 8×8-bord kunt beheersen, bijvoorbeeld op de wijze van het linkerdiagram in afbeelding 1.13.

Maar heb je ook echt negen koningen *nodig* om het hele bord te bestrijken? Het antwoord is *ja*, absoluut. Dat blijkt vrij eenvoudig aan te tonen. Kijk naar de negen donkere velden in het rechterdiagram in afbeelding 1.13. Ongeacht waar je een koning besluit neer te zetten



Afbeelding 1.13 | Er zijn negen koningen nodig om het hele bord te beheersen.

op dit bord, een enkele koning zou op z'n hoogst een van die donkere velden bestrijken. Met andere woorden, een enkele koning zou nooit twee van de donkere velden tegelijkertijd kunnen bestrijken. En daarom heb je op z'n minst negen koningen nodig om alleen al de donkere velden te beheersen, en om die reden heb je minstens negen koningen nodig om het hele bord te bestrijken.

Merk op dat we bij de behandeling van de vraag 'hoeveel koningen heb je nodig om een 8×8-bord te beheersen?' twee dingen hebben moeten doen om tot de conclusie te komen dat 'negen' het juiste antwoord is. We hebben moeten aantonen dat het antwoord 'negen of minder' was door echt negen koningen op het bord te plaatsen. En we hebben moeten aantonen dat het antwoord 'negen of meer' was met behulp van een ander ad-hocargument, in dit geval een nogal slimme truc met donkergekleurde velden. Omdat we beide stellingen hebben bewezen, moet het antwoord 'negen' zijn.

Bij het soort dekkingsproblemen die we zojuist bekeken hebben, zijn we steeds op zoek naar het *minimale* aantal stukken van een zeker type dat nodig is om het hele bord te bestrijken. Hoeveel lopers heb je nodig om een schaakbord te beheersen? Hoeveel paarden? Dit zijn voorbeelden van een grote en belangrijke categorie problemen die in de grafentheorie *dominantieproblemen* worden genoemd. Dominantieproblemen worden tegenwoordig door wiskundigen overal ter wereld onderzocht, voornamelijk omdat ze zich op natuurlijke wijze aandienen bij een groot aantal praktische toepassingen. Maar laten we niet vergeten dat dominantieproblemen pas voor het eerst opdoken toen mensen zich gingen bezighouden met 'dekkingskwesties' van schaakstukken. Zelfs het agressieve karakter van de term 'dominantie' herinnert ons eraan dat dominantie in de grafentheorie

zijn wortels heeft in het schaken, dat per slot van rekening vele eeuwen geleden als oorlogsspel is ontstaan.

Onafhankelijkheid

We richten onze aandacht nu op een andere grote en belangrijke categorie problemen. Bij deze problemen gaan we vragen stellen die vergelijkbaar zijn met de vragen die we zojuist bij de dominantietheorie zijn tegengekomen, maar waar een soort omgekeerde draai aan zit. Wat is bijvoorbeeld het *maximale* aantal paarden dat je op een 8×8-bord kunt plaatsen zodanig dat geen enkel paard een ander paard aanvalt? Misschien moet je hier even je gedachten over laten gaan voordat je verder leest. We noemen een groep paarden *onafhankelijk* als geen enkel paard een ander paard aanvalt. Vragen zoals de vraag die we ons zojuist gesteld hebben worden *onafhankelijkheidsproblemen* genoemd.

Om die specifieke vraag over het plaatsen van onafhankelijke paarden op een schaakbord te beantwoorden, moeten we twee dingen doen, net zoals dat voor dominantievraagstukken nodig was. Ten eerste hadden we al vastgesteld dat een paard op, zeg, een zwart veld alleen naar een wit veld kan springen; als we 32 paarden op de 32 zwarte velden plaatsen, kan geen enkel paard een ander paard aanvallen. Die 32 paarden zijn dus onafhankelijk. Het ligt tamelijk voor de hand dat dit de optimale oplossing is, maar hoe kunnen we dat bewijzen? Dat is het tweede ding dat we moeten doen.

Dat kan bijvoorbeeld op de volgende manier. Dankzij het werk van Euler weten we al dat het 8×8-bord een paardenrondgang heeft en we hebben ook waargenomen dat bij die rondgang er voortdurend van veldkleur wordt gewisseld. Omdat we geen twee onafhankelijke paarden ergens op die rondgang op 'aangrenzende' velden kunnen plaatsen, kunnen we *ten hoogste* 32 onafhankelijke paarden langs die route plaatsen. Daarmee is 32 het hoogst haalbare. Deze redenering verschaft ons een onverwachte bonus waar we niet eens naar op zoek waren: omdat de rondgang wit met zwart afwisselt, moeten de 32 paarden hetzij allemaal op de zwarte velden, hetzij allemaal op de witte velden worden geplaatst. Met andere woorden, de eenvoudige plaatsing die we aanvankelijk verzonnen hadden – alle paarden op velden van dezelfde kleur zetten – was in feite de enige oplossing.

Ziehier een alternatieve redenering waarom 32 het *beste* is wat we kunnen bereiken. Verdeel het bord eerst in acht rechthoeken van

2 × 4. Omdat een paard in een van die rechthoeken precies twee velden in die rechthoek bestrijkt, kunnen er *maximaal* vier onafhankelijke paarden in elke rechthoek worden geplaatst. Aangezien er maar acht rechthoeken zijn, kunnen we onmogelijk meer dan 32 onafhankelijke paarden op het schaakbord kwijt.

We zullen later nog uitvoerig terugkomen op dominantie- en onafhankelijkheidsproblemen, maar voor nu volstaan we met het volgende probleem.

Probleem 1.5 | Plaats acht lopers op het schaakbord (8 × 8) die het hele bord *domineren*. Plaats veertien lopers zo op het bord dat ze *onafhankelijk* zijn. In beide gevallen is dat het maximaal haalbare aantal. Bedenk dat een loper zich naar een willekeurig veld verplaatst langs een diagonaal pad en dat het stuk dus altijd gebonden is aan velden van dezelfde kleur.

Grieks-Latijnse vierkanten

We hebben nu de hoofdonderwerpen besproken waarmee we ons in dit boek gaan bezighouden: paardenrondgangen, dominantie, onafhankelijkheid, veldkleuring, geometrische problemen, schaakborden en andere oppervlakken, en zelfs polyomino's. Maar een onderwerp dat zo breed – en zo vaag gedefinieerd – is als 'schaakborden', laat veel ruimte open voor een groot aantal uiteenlopende kwesties en problemen die weliswaar moeilijk te categoriseren zijn, maar wel onze aandacht verdienen. Ter afsluiting van deze inleiding wil ik kort zo'n thema aan de orde stellen.

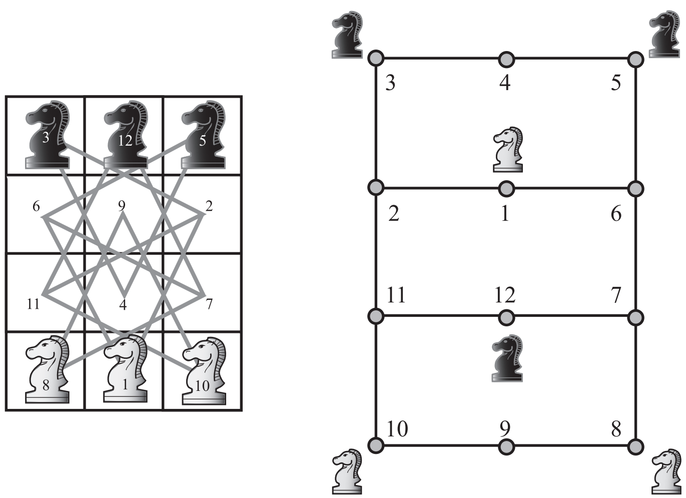
De allereerste keer dat ik een van Martin Gardners *Mathematical Games*-columns tegenkwam, was in het novembernummer van de *Scientific American* van 1959. Het onderwerp van die column was Grieks-Latijnse vierkanten. Op het omslag van dat nummer stond zelfs een door die column geïnspireerd schilderij, een groot raster van 10 × 10, dat veel weg had van een schilderij van Piet Mondriaan.

Dit is alles wat ik voorlopig kwijt wil over Grieks-Latijnse vierkanten. Het bleek dat het schilderij op de cover van het blad en Gardners column niets minder waren dan een schokkende aankondiging van het feit dat een heel beroemde stelling, voor het eerst geponeerd door Leonhard Euler en bijna 200 jaar onaangevochten, eindelijk volledig onderuit was gehaald. Wat een Grieks-Latijns vierkant nu eigenlijk is, mag je zelf uitvinden aan de hand van een raadsel dat populair was in de achttiende eeuw, het zogeheten *probleem van Ozanam*.

Probleem 1.6 | Haal alle vier azen, heren, vrouwen en boeren uit een spel kaarten. Rangschik de zestien kaarten zodanig in vier rijen en vier kolommen, dat elke rij en elke kolom alle vier kaartwaarden en alle vier troefkleuren bevat. Als je daarin slaagt, heb je een *Grieks-Latijns vierkant van de orde 4* gemaakt. Martin Gardner kwam nog met een extra eis: rangschik de kaarten zodanig dat ook de twee diagonalen van het vierkant aan dezelfde voorwaarden voldoen.

Oplossingen

Oplossing 1.1 | In afbeelding 1.14 tekenen we eerst de graaf van het paard op zijn natuurlijke positie op het schaakbord en nummeren we tegelijkertijd de velden van het bord op een conventionele manier. Vervolgens gaan we de graaf natuurlijk uitvouwen.



Afbeelding 1.14 | Verwissel de paarden in zestien zetten.

We kunnen aan de graaf onmiddellijk zien dat er zeven zetten nodig zijn om alleen de drie zwarte paarden naar de gewenste posities te brengen. Dat kan eigenlijk maar op één manier: breng het paard van 5 recht omlaag naar 8 en verplaats de andere twee paarden twee velden, respectievelijk van 3 naar 1 en van 12 naar 10. We hopen nu de complete verwisseling van alle paarden in slechts veertien zetten te kunnen uitvoeren, zeven voor elke kleur, maar helaas kunnen we in die zeven zetten de zwarte en de witte paarden niet verplaatsen zonder dat ze elkaar in de weg lopen. We kunnen echter wel één paard op het geschikte moment een enkele stap terug laten doen om de weg vrij te maken voor een tegenligger. Daarmee verliezen we slechts twee zetten, het beste wat we kunnen hopen te bereiken.

Een oplossing in zestien zetten gaat als volgt: het zwarte paard

van 5 gaat omlaag naar 7; daardoor kan het witte paard van 1 naar zijn plek op 5, waardoor het zwarte paard van 3 naar zijn plek kan op 1, waardoor het witte paard op 10 direct naar zijn plek kan op 3 en het zwarte paard van 12 op zijn beurt naar 10 kan gaan. Tot zover een gladde operatie. Maar nu stapt het zwarte paard op 7 – het vriendelijke paard, als je wilt – terug naar 6 om het witte paard op 8 de kans te geven naar zijn plek op 12 te gaan, waarna het zwarte paard zijn verder rechte pad vervolgt naar 8.

Oplossing 1.2 | De oplossingen voor dit probleem worden gegeven in afbeelding 1.15.

5	26	1	16	11	20
2	15	4	19	30	17
25	6	27	12	21	10
14	3	8	23	18	29
7	24	13	28	9	22

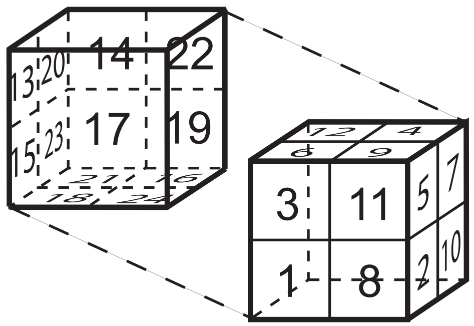
26	29	2	21	8	23	6	17	14	11
1	20	27	24	3	18	9	12	5	16
28	25	30	19	22	7	4	15	10	13

1	4	7	10
12	9	2	5
3	6	11	8

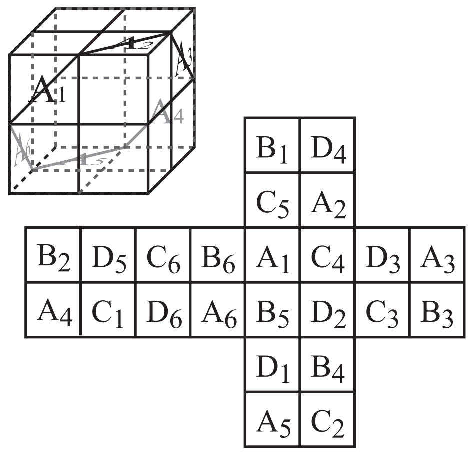
Afbeelding 1.15 | Rondgangen van het 5×6- en 3×10-bord, en een open rondgang van het 3×4-bord.

Oplossing 1.3 | De strategie bestaat hier uit een open rondgang van de drie zichtbare zijden (de velden 1-12 in afbeelding 1.16). Herhaal vervolgens precies dezelfde rondgang op de drie onzichtbare achterzijden (de velden 13-24). Tot slot kunnen deze twee open rondgangen verbonden worden met paardzetten bij de velden 12-13 en de velden 24-1 om de rondgang van de hele $2 \times 2 \times 2$-kubus compleet te maken. Deze specifieke oplossing is natuurlijk een kopie van Eulers rondgang van het 8×8-bord in afbeelding 1.5.

Voor een andere oplossing wordt gebruik gemaakt van een idee van Ian Stewart in *Another Fine Math You've Got Me Into* [28]. Het hart van de oplossing bestaat uit dit wonderschone idee uit de geometrie: als je een kubus van $2 \times 2 \times 2$ zo vasthoudt dat een van de hoofddiagonalen verticaal loopt en je de kubus vervolgens horizontaal precies in tweeën snijdt, zal de resterende dwarsdoorsnede een regelmatige zeshoek zijn. In feite zijn de zijden van die zeshoek niets anders dan de diagonalen van de zes 1×1-vierkanten die door de horizontale



Afbeelding 1.16 | De voor- en achterzijden van een 2 × 2 × 2-rondgang.



Afbeelding 1.17 | Een hexagonale dwarsdoorsnede en vier minirondgangen.

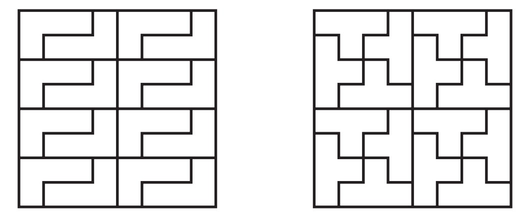
doorsnede in tweeën zijn gedeeld, zoals weergegeven in afbeelding 1.17.

Het verrassende is nu dat deze zeshoek een minirondgang vormt, in afbeelding 1.17 aangeduid met A_1, A_2, …, A_6. En omdat een kubus vier hoofddiagonalen heeft, kunnen we op deze manier vier verschillende zeshoeken en dus vier verschillende minirondgangen maken. De overige drie minirondgangen zijn in afbeelding 1.17 aangegeven met B_1, B_2,…, B_6; C_1, C_2,…, C_6; en D_1, D_2,…, D_6. Deze minirondgangen zijn natuurlijk gesloten 6-cycli die op een of andere manier met elkaar verbonden moeten worden. Merk echter op dat A_6-B_1, B_6-C_1,

C_6-D_1 en D_6-A_1 allemaal legale paardzetten zijn op de 2 × 2 × 2-kubus. Daarom kunnen we de volgende paardenrondgang formeren van de hele 2 × 2 × 2-kubus:

$$A_1, A_2, \ldots, A_6, B_1, B_2, \ldots, B_6, C_1, C_2, \ldots, C_6, D_1, D_2, \ldots, D_6.$$

Oplossing 1.4 | Het 8 × 8-bord kan eenvoudig afgedekt worden met zestien L-tetromino's of zestien T-tetromino's; de simpelste manieren om dat te doen zijn weergegeven in afbeelding 1.18.

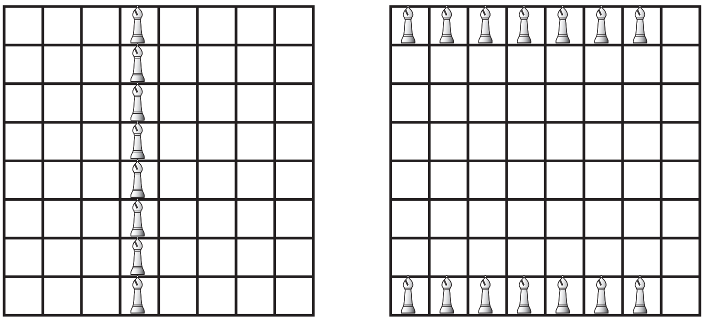


Afbeelding 1.18 | Het 8 × 8-bord afdekken met tetromino's.

Gebruik je alleen Z-tetromino's, dan is het onmogelijk het hele 8 × 8-bord af te dekken. Stel dat je begint met het veld in de linkerbovenhoek af te dekken met een horizontaal geplaatste Z-tetromino. Dat houdt in dat je gedwongen bent er weer direct een naast te plaatsen op de bovenste rij, en ook nog een derde. Maar dan loop je volledig vast, want er is geen mogelijkheid om de resterende twee velden aan het einde van de bovenste rij af te dekken. Het maakt natuurlijk geen verschil of je in de linkerbovenhoek begint met een verticaal geplaatste Z-tetromino. Dan doet zich hetzelfde probleem voor aan de linkerkant van het bord.

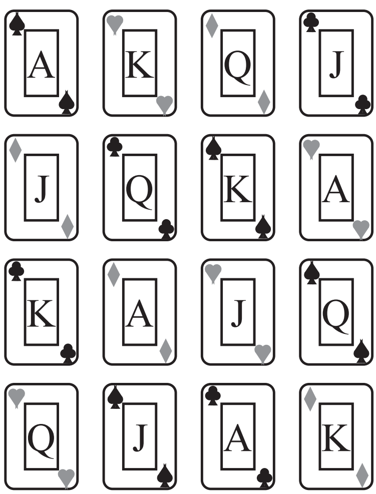
Het is eveneens onmogelijk een 4 × 5- of een 2 × 10-bord af te dekken met de vijf verschillende tetromino's. Een veldkleuring van deze borden levert tien witte en tien zwarte velden op. Het is eenvoudig te zien dat de vierkante tetromino, de horizontale tetromino, de L-tetromino en de Z-tetromino elk steeds twee witte en twee zwarte velden afdekken – hoe je ze ook op het bord plaatst. Maar de T-tetromino dekt altijd drie velden van de ene en één veld van de andere kleur af. Daarom is het onmogelijk dat alle vijf tetromino's een gelijk aantal witte en zwarte velden afdekken.

Oplossing 1.5 | De oplossingen voor dit probleem worden gegeven in afbeelding 1.19.



Afbeelding 1.19 | Acht dominante lopers en veertien onafhankelijke lopers.

Oplossing 1.6 | De oplossing voor dit probleem wordt gegeven in afbeelding 1.20.



Afbeelding 1.20 | Een oplossing van het probleem van Ozanam.