NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets II

zaterdag 8 juni 2013

Opgave 1. Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{2013} \frac{4026!}{\left(n!(2013-n)!\right)^2}$$

het kwadraat van een geheel getal is.

Opgave 2. Zij P het snijpunt van de diagonalen van een convexe vierhoek $ABCD$. Laat X, Y en Z punten op het inwendige van respectievelijk AB, BC en CD zijn zodat

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BY|}{|YC|} = \frac{|CZ|}{|ZD|} = 2.$$

Veronderstel bovendien dat XY raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle CYZ$ en dat YZ raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle BXY$.
Bewijs dat $\angle APD = \angle XYZ$.

Opgave 3. Gegeven is een onbekende rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van gehele getallen die voldoet aan de volgende eigenschap: voor elk priemgetal p en elk positief geheel getal k geldt

$$a_{pk+1} = pa_k - 3a_p + 13.$$

Bepaal alle mogelijke waarden van a_{2013}.

Opgave 4. Bepaal alle gehele getallen $n \geq 2$ waarvoor geldt dat

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \mod 2$$

voor alle i en j met $0 \leq i \leq j \leq n$.

Opgave 5. In een koordenzeshoek $ABCDEF$ geldt $AB \perp BD$ en $|BC| = |EF|$. Noem P het snijpunt van BC en AD en noem Q het snijpunt van EF en AD. Neem aan dat P en Q allebei aan de kant van D liggen waar A niet ligt. Zij S het midden van AD. Laat K en L de middelpunten zijn van de ingeschreven cirkels van respectievelijk $\triangle BPS$ en EQS.
Bewijs dat $\angle KDL = 90°$.