Toets 6 juni 2012

Elke opgave is 7 punten waard.

Opgave 1. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC. Een lijn door I snijdt het inwendige van lijnstuk AB in M en het inwendige van lijnstuk BC in N. We nemen aan dat BMN een scherphoekige driehoek is. Laat nu K en L punten op lijnstuk AC zijn zodat $\angle BMI = \angle ILA$ en $\angle BNI = \angle IKC$.
Bewijs dat $|AM| + |KL| + |CN| = |AC|$.

Opgave 2. Laat a, b, c en d positieve reële getallen zijn. Bewijs dat

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

Opgave 3. Bepaal alle positieve gehele getallen die niet geschreven kunnen worden als $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ met a, b positief en geheel.

Opgave 4. Zij n een positief geheel getal deelbaar door 4. We bekijken permutaties $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ van $(1, 2, \ldots, n)$ met de volgende eigenschap: voor elke j geldt dat als we $i = a_j$ nemen, dan $a_i + j = n + 1$. Bewijs dat er precies $\dfrac{(\frac{1}{2}n)!}{(\frac{1}{4}n)!}$ zulke permutaties zijn.

Opgave 5. Zij Γ de omgeschreven cirkel van de scherphoekige driehoek ABC. De bissectrice van hoek ABC snijdt AC in het punt B_1 en de korte boog AC van Γ in het punt P. De lijn door B_1 loodrecht op BC snijdt de korte boog BC van Γ in K. De lijn door B loodrecht op AK snijdt AC in L.
Bewijs dat K, L en P op een lijn liggen.