Toets 8 juni 2011

Elke opgave is 7 punten waard.

Opgave 1. Vind alle paren (x, y) van gehele getallen die voldoen aan

$$x^2 + y^2 + 3^3 = 456\sqrt{x - y}.$$

Opgave 2. We bekijken betegelingen van een rechthoekig $m \times n$-bord met 1×2-tegels. De tegels mogen zowel horizontaal als verticaal liggen, maar ze mogen elkaar niet overlappen en niet buiten het bord uitsteken. Alle velden van het bord moeten bedekt worden door een tegel.

a) Bewijs dat bij elke betegeling van een 4×2010-bord met 1×2-tegels er een rechte lijn is die het bord in twee stukken verdeelt zodat elke tegel in zijn geheel binnen één van de stukken ligt.

b) Bewijs dat er een betegeling van een 5×2010-bord met 1×2-tegels bestaat zodat er geen rechte lijn is die het bord in twee stukken verdeelt zodat elke tegel in zijn geheel binnen één van de stukken ligt.

Opgave 3. De cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden elkaar in D en P. De gemeenschappelijke raaklijn van de twee cirkels het dichtste bij punt D raakt Γ_1 in A en Γ_2 in B. De lijn AD snijdt Γ_2 voor de tweede keer in C. Zij M het midden van lijnstuk BC.
Bewijs dat $\angle DPM = \angle BDC$.

Opgave 4. Bepaal alle gehele getallen n waarvoor het polynoom $P(x) = 3x^3 - nx - n - 2$ te schrijven is als het product van twee niet-constante polynomen met gehele coëfficiënten.

Opgave 5. Zij ABC een driehoek met $|AB| > |BC|$. Zij D het midden van AC. Zij E het snijpunt van de bissectrice van $\angle ABC$ met de lijn AC. Zij F op BE zo dat CF loodrecht op BE staat. Zij verder G het snijpunt van CF en BD.
Bewijs dat DF het lijnstuk EG doormidden snijdt.