

Toets 18 maart 2011

Elke opgave is 7 punten waard.

Opgave 1. Alle positieve gehele getallen worden rood of groen gekleurd, zodat aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

- Er zijn zowel rode als groene getallen.
- De som van drie (niet noodzakelijk verschillende) rode getallen is rood.
- De som van drie (niet noodzakelijk verschillende) groene getallen is groen.

Vind alle mogelijke kleuringen die hieraan voldoen.

Opgave 2. In de scherphoekige driehoek ABC is $\angle C$ groter dan $\angle A$. Zij E zodat AE een middellijn is van de omschreven cirkel Γ van $\triangle ABC$. Zij K het snijpunt van AC en de raaklijn in B aan Γ . Zij L het voetpunt van de loodlijn vanuit K op AE en zij D het snijpunt van KL en AB .

Bewijs dat CE de bissectrice van $\angle BCD$ is.

Opgave 3. Vind alle drietallen reële getallen (x, y, z) die voldoen aan

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = xy + yz + zx + |x - 2y + z|.$$

Opgave 4. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Zij a het grootste positieve gehele getal waarvoor geldt $2^a \mid 5^n - 3^n$. Zij b het grootste positieve gehele getal waarvoor geldt $2^b \leq n$.

Bewijs dat $a \leq b + 3$.

Opgave 5. Gegeven is een trapezium $ABCD$ met $BC \parallel AD$. Neem aan dat de bissectrices van de hoeken BAD en CDA elkaar snijden op de middelloodlijn van lijnstuk BC .

Bewijs dat $|AB| = |CD|$ of $|AB| + |CD| = |AD|$.