Toets 12 juni 2010

Elke opgave is 7 punten waard.

1. Bekijk rijen a_1, a_2, a_3, ... van positieve gehele getallen. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van a_{2010} als gegeven is:

   (i) $a_n < a_{n+1}$ voor alle $n \geq 1$,

   (ii) $a_i + a_l > a_j + a_k$ voor alle viertallen (i, j, k, l) met $1 \leq i < j \leq k < l$.

2. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y))$$

   voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   (In het algemeen betekent de uitdrukking $a = \max\limits_{s \in S} g(s)$: er geldt $a \geq g(s)$ voor alle $s \in S$ en bovendien is er een $s \in S$ waarvoor $a = g(s)$.)

3. (a) Laat a en b positieve gehele getallen zijn zodat $M(a, b) = a - \frac{1}{b} + b\left(b + \frac{3}{a}\right)$ een geheel getal is. Bewijs dat $M(a, b)$ een kwadraat is.

   (b) Vind gehele getallen a en b, beide ongelijk aan nul, zodat $M(a, b)$ een positief geheel getal is, maar geen kwadraat.

4. Gegeven is een vierkant $ABCD$ met omgeschreven cirkel Γ_1. Zij P een punt op boog AC waar ook B op ligt. Een cirkel Γ_2 raakt inwendig aan Γ_1 in P en raakt daarnaast diagonaal AC in Q. Zij R een punt op Γ_2 zodat de lijn DR raakt aan Γ_2. Bewijs dat $|DR| = |DA|$.

5. Het polynoom $A(x) = x^2 + ax + b$ met gehele coëfficiënten heeft de eigenschap dat voor elk priemgetal p er een geheel getal k bestaat zodat $A(k)$ en $A(k + 1)$ beide deelbaar zijn door p. Bewijs dat er een geheel getal m bestaat zodat $A(m) = A(m + 1) = 0$.