Uitwerkingen toets 2008

Opgave 1. Uit $f(m) = f(n)$ volgt $3m = 3n$ dus $m = n$. Dus f is injectief. Nu bewijzen we met volledige inductie naar n dat $f(n) = n$ voor alle n.
Omdat $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ geldt $f(1) \geq 1$, $f(f(1)) \geq 1$ en $f(f(f(1))) \geq 1$. Vullen we nu $n = 1$ in de functievergelijking in, dan zien we dat

$$f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3,$$

dus moet overal gelijkheid gelden: $f(1) = f(f(1)) = f(f(f(1))) = 1$.
Zij nu $k \geq 2$ en stel dat we voor alle $n < k$ bewezen hebben dat $f(n) = n$. Dan volgt uit de injectiviteit van f dat voor alle $m \geq k$ geldt dat $f(m) \geq k$; de lagere functiewaardes worden immers al aangenomen. Dus in het bijzonder geldt $f(k) \geq k$ en dan ook $f(f(k)) \geq k$ en daarom ook $f(f(f(k))) \geq k$. Vullen we nu $n = k$ in de functievergelijking in, dan zien we dat

$$f(f(f(k))) + f(f(k)) + f(k) = 3k.$$

We zien dat ook nu weer overal gelijkheid moet gelden, dus $f(k) = k$. Dit voltooit de inductie.
De enige functie die kan voldoen is dus $f(n) = n$ voor alle n. Deze functie voldoet ook daadwerkelijk, want

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = n + n + n = 3n.$$

□

Opgave 2. Zij $2n$ het aantal kaarten en ga ervan uit dat de kaarten in de rij achtereenvolgens a_1, a_2, $\ldots$, a_{2n} zijn. We bewijzen met inductie naar n dat Johan dan altijd kan zorgen dat hij naar keuze alle oneven kaarten $a_1, a_3, a_5, \ldots$ pakt of juist alle even kaarten $a_2, a_4, a_6, \ldots$. Voor $n = 1$ pakt Johan kaart a_1 als hij de oneven kaarten wil en kaart a_2 als hij de even kaarten wil. Stel we hebben het bewezen voor zekere n. Bekijk de kaarten a_1, a_2, $\ldots$, a_{2n+2}. Als Johan de oneven kaarten wil, pakt hij eerst a_1. Julian pakt vervolgens a_2 of a_{2n+2}. Daarna blijft over de rij b_1, b_2, $\ldots$, b_{2n}. In het eerste geval geldt $b_i = a_{i+2}$ voor alle i en kan Johan volgens de inductiehypothese alle oneven b_i krijgen, wat hem samen met de kaart a_1 alle oneven kaarten oplevert. In het tweede geval geldt $b_i = a_{i+1}$ voor alle i en kan Johan volgens de inductiehypothese alle even b_i krijgen, wat hem samen met de kaart a_1 alle oneven kaarten oplevert. Johan kan dus zorgen dat hij alle oneven kaarten krijgt. Analoog kan hij ook zorgen dat hij alle even kaarten krijgt. Dit voltooit de inductie.
Johan kan nu zorgen dat hij minstens evenveel punten scoort als Julian op de volgende manier: als de som van de getallen op de oneven kaarten minstens even groot is als de som van de getallen op de even kaarten, dan kiest hij alle oneven kaarten. Zo niet, dan kiest hij alle even kaarten. □

Opgave 3.

(a) *Oplossing 1.* Merk op dat voor $1 \leq i \leq m$ en $1 \leq j \leq n$ geldt:

$$\begin{array}{cc}
a_j \geq i & \Longleftrightarrow \\
a_1, a_2, \ldots, a_j \geq i & \Longleftrightarrow \\
\text{minstens } j \text{ van de } a\text{'tjes zijn groter of gelijk aan } i & \Longleftrightarrow \\
b_i \geq j & \Longleftrightarrow \\
b_1, b_2, \ldots, b_i \geq j & \Longleftrightarrow \\
\text{minstens } i \text{ van de } b\text{'tjes zijn groter of gelijk aan } j & \Longleftrightarrow \\
c_j \geq i. &
\end{array}$$

Zij nu j gegeven. Neem dan eerst $i = a_j$, dan is de eerste regel waar, dus de laatste ook: $c_j \geq a_j$. Neem andersom $i = c_j$, dan is de laatste regel waar, dus de eerste ook: $a_j \geq c_j$. Nu volgt $a_j = c_j$.

Oplossing 2. Wegens de niet-stijgendheid geldt $b_i = \max\{l : a_l \geq i\}$ en $c_j = \max\{i : b_i \geq j\}$. Dus voor $1 \leq j \leq n$ geldt

$$c_j = \max\{i : b_i \geq j\} = \max\{i : \max\{l : a_l \geq i\} \geq j\}.$$

Voor een vaste i geldt:

$$\max\{l : a_l \geq i\} \geq j \quad \Longleftrightarrow \quad a_j \geq i,$$

dus $c_j = \max\{i : a_j \geq i\} = a_j$.

(b) *Oplossing 1.* Voor $1 \leq k \leq m$ geldt

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i - b_k) = \sum_{i=1}^{k}\left(\#\{l : a_l \geq i\} - \#\{l : a_l \geq k\}\right) = \sum_{i=1}^{k}\#\{l : k > a_l \geq i\}.$$

Elk element a_l uit de rij (met $k > a_l$) wordt hierin precies a_l maal geteld (namelijk voor elke $i \leq a_l$) dus dit is niets anders dan de som van al dergelijke a_l. Nu is (zie oplossing 1 van onderdeel a) $k \leq a_l$ dan en slechts dan als $l \leq b_k$, dus $k > a_l$ dan en slechts dan als $l > b_k$, dus

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i - b_k) = \sum_{l:k>a_l} a_l = \sum_{l=b_k+1}^{n} a_l,$$

en hier volgt het te bewijzen direct uit.

Oplossing 2. We bewijzen dit met inductie naar k. Voor $k = 1$ staat er

$$b_1 \stackrel{?}{=} b_1 + \sum_{j=b_1+1}^{n} a_j,$$

en dit is waar omdat $b_1 = \#\{j : a_j \geq 1\} = n$, dus de som aan de rechterkant is leeg. Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere k met $1 \leq k \leq m-1$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} b_i &= \sum_{i=1}^{k} b_i + b_{k+1} \\
&\overset{\text{IH}}{=} k \cdot b_k + \sum_{j=b_k+1}^{n} a_j + b_{k+1} \\
&= (k+1) \cdot b_{k+1} + \sum_{j=b_{k+1}+1}^{n} a_j + k(b_k - b_{k+1}) - \sum_{j=b_{k+1}+1}^{b_k} a_j \\
&= (k+1) \cdot b_{k+1} + \sum_{j=b_{k+1}+1}^{n} a_j + k(b_k - b_{k+1}) - \sum_{j=b_{k+1}+1}^{b_k} k \\
&= (k+1) \cdot b_{k+1} + \sum_{j=b_{k+1}+1}^{n} a_j.
\end{aligned}$$

□

Opgave 4. Zij a zo dat $1 + 12n^2 = a^2$. We kunnen dit herschrijven als

$$12n^2 = a^2 - 1 = (a+1)(a-1).$$

De linkerkant is deelbaar door 2, dus de rechterkant ook, dus a is oneven. Omdat links een even aantal factoren 2 staat, moeten zowel $a+1$ en $a-1$ deelbaar zijn door een oneven aantal factoren 2 (de een is namelijk deelbaar door precies één factor 2). Verder geldt $\text{ggd}(a+1, a-1) = 2$, dus alle oneven priemfactoren die voorkomen in n, komen voor in precies één van $a+1$ en $a-1$. Voor de priemfactoren groter dan 3 geldt dat ze rechts een even aantal keer voorkomen; de priemfactor 3 komt een oneven aantal keer voor. Concluderend zijn er twee mogelijkheden:

$$a + 1 = 6b^2 \quad \text{en} \quad a - 1 = 2c^2$$

voor zekere gehele b en c met $bc = n$ of

$$a + 1 = 2b^2 \quad \text{en} \quad a - 1 = 6c^2$$

voor zekere gehele b en c met $bc = n$. Bekijk eerst het eerste geval. Dan is $a+1$ deelbaar door 3 en dus $a - 1 \equiv 1 \mod 3$. Maar daaruit volgt $c^2 \equiv 2 \mod 3$ en dat is onmogelijk. Dus het tweede geval moet gelden. Maar dan is

$$2 + 2\sqrt{1 + 12n^2} = 2 + 2a = 2(a+1) = 4b^2 = (2b)^2,$$

en dat is wat we moesten bewijzen. □

Opgave 5. *Oplossing 1.* Zij S het snijpunt van Γ en CQ. We moeten bewijzen dat $|QS| = |SC|$.
De lijn BC is een raaklijn aan Γ, dus geldt $\angle CBP = \angle BAP = \angle QAP$. Omdat de driehoeken CBP en QAP beide gelijkbenig zijn, zijn ze gelijkvormig. Zij $\alpha = \angle BCP$, dan geldt

$$\alpha = \angle BCP = \angle CPB = \angle QPA = \angle AQP.$$

We zien nu dat

$$\angle CPQ = \angle CPB + \angle BPQ = \angle QPA + \angle BPQ = \angle BPA = 90^\circ.$$

Dus P ligt, net als B, op de cirkel met middellijn CQ. Punt S ligt op deze middellijn en we willen laten zien dat S het middelpunt van de cirkel is, dus het is voldoende om te laten zien dat

$$\angle BSP = 2\alpha = 2\angle BCP.$$

In koordenvierhoek $QBCP$ geldt $\angle CPB = \angle CQB$, dus

$$2\alpha = \angle CQB + \angle AQP = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \angle PBC = 90^\circ + \angle QBC - \angle PBC = 90^\circ + \angle QBP.$$

In koordenvierhoek $ABSP$, waarin AB de middellijn is, zien we

$$90^\circ + \angle QBP = 90^\circ + \angle ABP = \angle BSA + \angle ASP = \angle BSP,$$

zodat we kunnen concluderen

$$2\alpha = \angle BSP$$

en dat is wat we wilden bewijzen. □

Oplossing 2. Merk eerst op (net als in de vorige oplossing) dat de twee gelijkbenige driehoeken gelijkvormig zijn. Omdat BC loodrecht op AB staat, is de ene driehoek 90° gedraaid ten opzichte van de andere. Zij l_1 de bissectrice van $\angle PBC$ en l_2 de bissectrice van $\angle PAQ$. Deze bissectrices staan nu loodrecht op elkaar. Zij T het snijpunt van l_1 en l_2. Dan geldt dus $\angle ATB = 90^\circ$, dus T ligt op Γ.
Nu is P het beeld van C onder spiegeling in l_1 en Q is het beeld van P onder spiegeling in l_2. De samenstelling van deze twee spiegelingen is de rotatie in T om $2 \cdot 90 = 180$ graden. Onder deze rotatie gaat C over in Q, dus CTQ is een rechte lijn. Dus $T = S$. Wegens de rotatie geldt ook $|TC| = |TQ|$, dus S is het midden van CQ. □