UITWERKINGEN TOETS TRAININGSKAMP

Valkenswaard, 10 juni 2006

Opgave 1.
Als we een verzameling punten in de ruimte hebben, mogen we een punt van de verzameling spiegelen in een ander punt van de verzameling en het beeld hiervan toevoegen aan de verzameling.
Als we beginnen met een verzameling bestaande uit zeven van de acht hoekpunten van een kubus, kunnen we dan het achtste hoekpunt in de verzameling krijgen na een eindig aantal stappen?

Oplossing:
Als we op de getallenlijn een punt x spiegelen in een punt y, dan krijgen we als spiegelbeeld het punt $S_y(x) = y - (x - y) = 2y - x$. Hetzelfde geldt voor punten in de ruimte: spiegelen we een willekeurig punt (x_1, x_2, x_3) in een punt (y_1, y_2, y_3), dan krijgen we $S_{(y_1,y_2,y_3)}(x_1, x_2, x_3) = (2y_1 - x_1, 2y_2 - x_2, 2y_3 - x_3)$.
We bekijken nu alleen punten met gehele coördinaten. Hoe we het roosterpunt (y_1, y_2, y_3) ook kiezen, de coördinaten van het beeld $S_{(y_1,y_2,y_3)}(x_1, x_2, x_3)$ van (x_1, x_2, x_3) hebben alle drie dezelfde pariteit als de coördinaten van (x_1, x_2, x_3). Er zijn $2^3 = 8$ verschillende mogelijkheden voor de pariteitscombinaties van de roosterpunten. We kunnen de punten van ons rooster dus kleuren met 8 kleuren, zodanig dat de kleur van een punt invariant is onder spiegeling in een willekeurig roosterpunt.
Beschouw nu de kubus met hoekpunten $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Deze hoekpunten hebben in bovengenoemde kleuring elk een andere kleur. Als er dus één hoekpunt ontbreekt, kunnen we deze niet verkijgen door het herhaald spiegelen van één van de andere hoekpunten, want je krijgt dan alleen maar punten van een kleur die je al had.

Opgave 2.
In een groep van scholieren spreken 50 scholieren Duits, 50 scholieren Frans en 50 scholieren Spaans. Sommige scholieren spreken meer dan één taal.
Bewijs dat de scholieren in 5 groepen verdeeld kunnen worden zodat in elke groep precies 10 scholieren Duits spreken, 10 Frans en 10 Spaans.

Oplossing:
Scholieren die geen enkele taal spreken kunnen we buiten beschouwing laten, want we kunnen ze willekeurig over de groepen verdelen.
We onderscheiden zeven typen scholieren, al naar gelang de talen die ze spreken: DFS, FS, SD, DF, D, F en S, waarbij bijvoorbeeld een S-scholier alleen Spaans spreekt.
Maak een Venn-diagram met de aantallen scholieren (zie figuur 1 op bladzijde 6): d DFS-scholieren, a FS-scholieren, b SD-scholieren en c DF-scholieren. Dus zijn er $50 - d - b - c$ D-scholieren, $50 - d - c - a$ F-scholieren en $50 - d - a - b$ S-scholieren. Definiëren we $t = a + b + c + d$, dan geldt dat er $50 - t + a$ D-scholieren zijn, $50 - t + b$ F-scholieren en $50 - t + c$ S-scholieren.
Ga er z.b.d.a. van uit dat $a \leq b \leq c$. We gaan eerst groepjes maken van 1 FS-scholier, 1 SD-scholier en 1 DF-scholier. Deze spreken samen alle drie de talen twee maal. Nadat we a van zulke groepjes hebben gemaakt, maken we d groepjes bestaande uit 1 DFS-scholier.
Nu houden we de volgende aantallen over:
0 FS-scholieren; $b - a \geq 0$ SD-scholieren en $c - a \geq 0$ DF-scholieren; $50 - d - b - c$ D-scholieren, $50 - d - c - a$ F-scholieren en $50 - d - a - b$ S-scholieren. Maken we $b - a$ groepjes van 1 SD-scholier en 1 F-scholier en ook $c - a$ groepjes van 1 DF-scholier en 1 S-scholier, dan houden we $50-d-b-c$ D-scholieren, $50-d-c-a-(b-a) = 50-d-c-b$ F-scholieren en $50 - d - a - b - (c - a) = 50 - d - b - c$ S-scholieren over, die samen $50 - d - b - c$ groepjes van 1 D-scholier, 1 F-scholier en 1 S-scholier vormen.
In alle tot nu toe gevormde groepjes worden de drie talen alle drie 1 keer, ofwel alle drie 2 keer gesproken. Voeg eerst de groepjes samen waarin alle drie de talen 2 keer worden gesproken, steeds totdat de talen 10 keer worden gesproken. Ga daarna verder met het toevoegen van groepjes waarin de talen 1 keer worden gesproken.
Dan krijgen we groepen waarin alle drie de talen 10 keer worden gesproken. Aangezien elke taal 50 keer wordt gesproken, leidt dit tot 5 van dergelijke groepen.

Opgave 3.
Cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden elkaar in P en Q. Zij A een punt op Γ_1 niet gelijk aan P of Q. De lijnen AP en AQ snijden Γ_2 nogmaals in respectievelijk B en C.
Bewijs dat de hoogtelijn uit A in driehoek ABC door een punt gaat dat onafhankelijk is van de keuze van A.

Oplossing:
Door het tekenen van verscheidene nette plaatjes hebben we het vermoeden gekregen dat de genoemde hoogtelijn altijd door het middelpunt van Γ_1 gaat. Dat dat ook daadwerkelijk zo is, gaan we nu bewijzen.
Het voetpunt van de hoogtelijn uit A op (het verlengde van) BC noemen we K, en het andere snijpunt van deze hoogtelijn met Γ_1 noemen we D. Te bewijzen: AD is een middellijn van Γ_1.
Er zijn verschillende configuraties mogelijk. We noemen boog PQ het deel van Γ_1 dat binnen Γ_2 ligt, en boog QP het andere deel van Γ_1. We bekijken eerst het geval dat D op boog PQ ligt (zie figuur 2 op bladzijde 6). In dit geval geldt:

$$\begin{aligned}
\angle DQC + \angle PQD = \angle PQC &= \pi - \angle CBP \text{ (wegens koordenvierhoek } PQCB\text{)}\\
&= \pi - \angle KBP \text{ (zelfde hoek)}\\
&= \pi - \angle KBA \text{ (zelfde hoek)}\\
&= \angle BAK + \angle AKB \text{ (hoekensom driehoek)}\\
&= \angle BAK + \tfrac{1}{2}\pi \text{ (} AK \text{ was hoogtelijn)}\\
&= \angle PAD + \tfrac{1}{2}\pi \text{ (zelfde hoek)}\\
&= \angle PQD + \tfrac{1}{2}\pi \text{ (omtrekshoek)}
\end{aligned}$$

zodat $\angle DQC = \frac{1}{2}\pi$. Uit $\angle AQD + \angle DQC = \angle AQC = \pi$ (gestrekte hoek) volgt nu dat $\angle AQD = \frac{1}{2}\pi$, zodat we wegens Thales kunnen concluderen dat AD een middellijn is van Γ_1.
Bekijk nu het geval dat $\angle B$ stomp is en dat B en C nog wel aan dezelfde kant van PQ liggen (zie figuur 3 op bladzijde 6). In dit geval geldt:

$$\begin{aligned}
\angle DQC - \angle DQP = \angle PQC &= \pi - \angle CBP \text{ (wegens koordenvierhoek } PQCB\text{)}\\
&= \angle PBK \text{ (gestrekte hoek)}\\
&= \angle ABK \text{ (zelfde hoek)}\\
&= \pi - \angle KAB - \angle BKA \text{ (hoekensom driehoek)}\\
&= \tfrac{1}{2}\pi - \angle KAB \text{ (} AK \text{ was hoogtelijn)}\\
&= \tfrac{1}{2}\pi - \angle DAP \text{ (zelfde hoek)}\\
&= \tfrac{1}{2}\pi - \angle DQP \text{ (omtrekshoek)}
\end{aligned}$$

zodat $\angle DQC = \frac{1}{2}\pi$. Uit $\angle AQD + \angle DQC = \angle AQC = \pi$ volgt wederom dat $\angle AQD = \frac{1}{2}\pi$, zodat we wegens Thales kunnen concluderen dat AD een middellijn is van Γ_1.
Alle andere configuraties gaan analoog. Door met georiënteerde hoeken te werken zouden we geen gevalsonderscheiding hoeven te gebruiken.

Opgave 4.
Zij $\mathbb{R}_{>0}$ de verzameling van positieve reële getallen. Laat $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeven zijn.
Vind alle functies $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ zodanig dat $f(a) = 1$ en

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}\colon\ f(x)f(y) + f(\tfrac{a}{x})f(\tfrac{a}{y}) = 2f(xy). \tag{1}$$

Oplossing:
Invullen van $x = a$ en $y = 1$ in (1) geeft $f(a)f(1) + f(\frac{a}{a})f(\frac{a}{1}) = 2f(a \cdot 1)$, wat wegens $f(a) = 1$ leidt tot $f(1) + f(1) = 2$, dus

$$f(1) = 1. \tag{2}$$

Invullen van $y = 1$ in (1) geeft $f(x)f(1)+f(\frac{a}{x})f(\frac{a}{1}) = 2f(x\cdot 1)$, wat wegens $f(a) = f(1) = 1$ leidt tot $f(x) + f(\frac{a}{x}) = 2f(x)$, dus

$$f(x) = f(\tfrac{a}{x}). \tag{3}$$

Maar dan gaat (1) over in $f(x)f(y) + f(x)f(y) = 2f(xy)$, dus

$$f(x)f(y) = f(xy). \tag{4}$$

Uit (3) en (4) volgt dat $f(x)f(x) = f(x)f(\frac{a}{x}) = f(x \cdot \frac{a}{x}) = f(a) = 1$, dus voor elke $x \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt $f(x) = 1$ of $f(x) = -1$.
Aangezien we positieve x kunnen schrijven als $\sqrt{x}\sqrt{x}$, vinden we m.b.v. (4) dat $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = (\pm 1)^2 = 1$, dus $f(x) = 1$ voor elke $x \in \mathbb{R}_{>0}$. We concluderen dat de enige mogelijkheid voor f blijkbaar de constante functie $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1$ is.
Ten slotte controleren we of de constante functie $\forall x:\ \ f(x) = 1$ daadwerkelijk voldoet. Aan $f(a) = 1$ wordt voldaan, terwijl (1) neerkomt op $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \cdot 1$, wat geldt.
Er is dus precies één functie f die aan de gevraagde voorwaarden voldoet, namelijk $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1$.

Opgave 5.
Zij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x. Laat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$ gegeven zijn.
Bewijs dat $\binom{n}{7} - \lfloor \frac{n}{7} \rfloor$ deelbaar is door 7.

Oplossing:
Schrijf $n = 7k + \ell$ voor gehele k en ℓ met $0 \leq \ell \leq 6$, dan geldt $\lfloor \frac{n}{7} \rfloor = \lfloor k + \frac{\ell}{7} \rfloor = k$.
Te bewijzen: $\binom{n}{7} \equiv k \pmod 7$.
Bewijs: Het uitschrijven van de binomiaalcoëfficiënt geeft

$$\binom{n}{7} = \frac{n!}{7!(n-7)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

De factor $(n - \ell)$ in de teller is gelijk aan $7k$, zodat

$$\binom{n}{7} = \frac{7k \cdot n(n-1) \cdots \widehat{(n-\ell)} \cdots (n-5)(n-6)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = k \cdot \frac{n(n-1) \cdots \widehat{(n-\ell)} \cdots (n-5)(n-6)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

waar $\widehat{(n-\ell)}$ betekent dat we de factor $(n-\ell)$ hebben weggelaten. Modulo 7 stonden in de teller de 7 restklassen modulo 7, maar nu we $(n - \ell) \equiv 0 \pmod 7$ hebben weggelaten staan in de teller precies de restklassen 1, 2, 3, 4, 5 en 6, net als in de noemer, die dus tegen elkaar wegvallen modulo het priemgetal 7. We houden over dat

$$\binom{n}{7} = k \cdot \frac{n(n-1) \cdots \widehat{(n-\ell)} \cdots (n-5)(n-6)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \equiv k \cdot 1 = k \pmod 7,$$

hetgeen te bewijzen was.