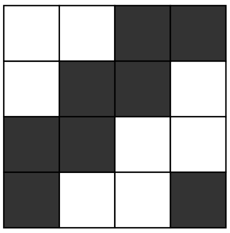
Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 september 2013

Uitwerkingen

1. We zullen bewijzen dat $n = 4$ de grootst mogelijke n is waarvoor een $n \times n$-tabel volgens de regels kan worden gekleurd. Dat $n = 4$ mogelijk is, zie je hier in de figuur.



We bewijzen nu dat er geen kleuring van de vierkantjes in een 5×5-tabel bestaat die aan de voorwaarde voldoet. Stel maar eens dat zo'n kleuring wel bestaat. Van de vierkantjes in elke rij is óf de meerderheid zwart, óf de meerderheid wit. We mogen wel aannemen dat er minstens drie rijen zijn met een meerderheid aan zwarte vierkantjes (het geval met minstens drie rijen met een meerderheid aan wit gaat op dezelfde manier). We bekijken nu de vierkantjes binnen drie van deze rijen. Van deze 15 vierkantjes zijn er dus minstens 9 zwart.

Als er een kolom is waarin elk van de drie rijen een zwart vakje heeft, dan kan elke andere kolom in hoogstens één van deze drie rijen een zwart vakje hebben. Het totaal aantal zwarte vakjes in de drie rijen is dan hoogstens $3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 < 9$, een tegenspraak.

In elke kolom hebben dus hoogstens twee van de drie rijen een zwart vakje. We bekijken het aantal kolommen met twee zwarte vakjes in de drie rijen. Als dit er meer dan drie zijn, dan hebben twee kolommen in dezelfde twee rijen een zwart vakje, en dat kan niet. Het aantal zwarte vakjes in de drie rijen is dus hoogstens $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$, wederom een tegenspraak.

Het is dus niet mogelijk om een 5×5-tabel volgens de voorwaarden te kleuren. Duidelijk is, dat het dan ook onmogelijk is om een $n \times n$-tabel volgens de eisen te kleuren wanneer $n > 5$. $\square$

2. De eerste vergelijking geeft $z = x + y + 1$. Dit vullen we in de tweede vergelijking in, zodat we vinden: $x^2 - y^2 + (x + y + 1)^2 = 1$. Uitwerken geeft $2x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$, oftewel $2(x+y)(x+1) = 0$. We zien nu dat $x+y = 0$ of $x+1 = 0$. We bekijken de twee gevallen apart.

- Als $x + y = 0$, dan geldt $y = -x$. De eerste vergelijking geeft $z = 1$. Invullen in de derde vergelijking geeft $-x^3 + (-x)^3 + 1^3 = -1$, oftewel $x^3 = 1$. We zien dat $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.
- Als $x + 1 = 0$, dan geldt $x = -1$. De eerste vergelijking geeft $z = y$. Invullen in de derde vergelijking geeft $-(-1)^3 + y^3 + y^3 = -1$, oftewel $y^3 = -1$. Dus $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

We vinden in totaal dus twee mogelijke oplossingen. Invullen in de oorspronkelijke vergelijkingen laat zien dat dit ook inderdaad oplossingen zijn. $\square$

3. We bewijzen eerst dat een aantal driehoeken in de figuur gelijkbenig zijn (de tophoek komt steeds overeen met de middelste letter).

(1) Driehoek ADC is gelijkbenig, want $\angle DAC = \angle ACB = \angle ACD$. De eerste gelijkheid geldt wegens Z-hoeken (AD is evenwijdig aan BC) en de tweede gelijkheid volgt uit het feit dat AC de bissectrice van hoek BCD is.

(2) Driehoek DAO is gelijkbenig, want $|AD| = |CD| = |AO|$. De eerste gelijkheid volgt uit (1) en de tweede gelijkheid is gegeven in de opgave.

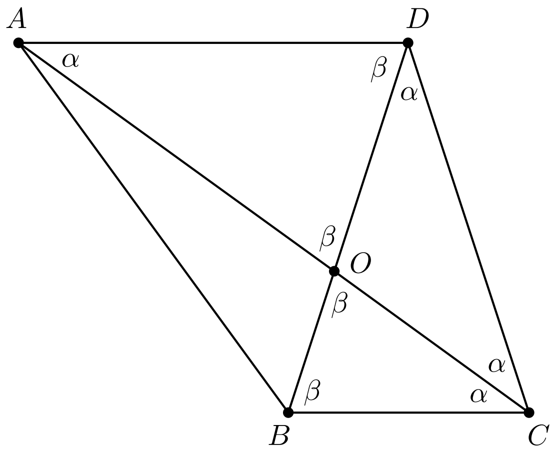
(3) Driehoek BCO is gelijkbenig, want hij is gelijkvormig met driehoek DAO (zandloperfiguur).

(4) Driehoek COD is gelijkbenig, want $|DO| = |BC| = |CO|$. Hier is de eerste gelijkheid gegeven in de opgave en de tweede volgt uit (3).

(5) Driehoek BDC is gelijkbenig, want hij is gelijkvormig met driehoek BCO omdat twee paar overeenkomstige hoeken gelijk zijn: $\angle DBC = \angle OBC$ en $\angle BDC = \angle DCO = \angle OCB$. Hier volgt de voorlaatste gelijkheid uit (4).

(6) Driehoek ADB is gelijkbenig, want $|AD| = |CD| = |BD|$ wegens (1) en (5).

We noemen $\angle ACB = \alpha$ en $\angle CBD = \beta$ (in graden). Uit (5) volgt dat $2\alpha = \beta$. Uit (3) volgt dat $180° = 2\beta + \alpha = 5\alpha$, dus $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$ en $\beta = 72°$. In de gelijkbenige driehoek ADB is de tophoek gelijk aan $\angle ADB = \beta$, dus de twee gelijke basishoeken zijn $\frac{180°-72°}{2} = 54°$. De gevraagde hoek is daarom $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 54° + 72° = 126°$.



□

4. a) Omdat $P(n) = 15n$ het product van de positieve delers van n is, moeten de priemdelers 3 en 5 van $P(n)$ ook delers zijn van n. Er volgt dat n een veelvoud is van 15. Als $n > 15$, dan zijn 3, 5, 15 en n verschillende delers van n, zodat geldt $P(n) \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot n = 225n$. Dat is in tegenspraak met het gegeven dat $P(n) = 15n$. De enige overgebleven mogelijkheid is dus $n = 15$. Dit is ook inderdaad een oplossing, want $P(15) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 15 \cdot 15$.

b) Stel dat $P(n) = 15n^2$ geldt. Dan moet n wederom een 15-voud zijn. Duidelijk is, dat $n = 15$ niet voldoet, zodat $n \geqslant 30$. We zien dat $\frac{n}{5} > 5$, zodat $1 < 3 < 5 < \frac{n}{5} < \frac{n}{3} < n$ zes verschillende delers zijn van n. Dus $P(n) \geqslant 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{n}{5} \cdot \frac{n}{3} \cdot n = n^3$. Omdat $n > 15$ geldt $P(n) \geqslant n \cdot n^2 > 15n^2$, een tegenspraak. Er bestaat dus geen n met $P(n) = 15n^2$. □

5. *Om het idee te bepalen berekenen we eerst het aantal vijven in de uitkomst* s *van de som* $1 + 10 + 19 + \cdots + 100000$. *Merk eerst op dat elke term in de som een negenvoud plus 1 is:*

$$s = 1 + (1 + 9) + (1 + 2 \cdot 9) + \cdots + (1 + 11111 \cdot 9).$$

Het aantal termen in de som is $11111 + 1 = 11112$ *en de gemiddelde waarde van een term is* $\frac{1+100000}{2}$. *Hieruit volgt dat* $s = 11112 \cdot \frac{100001}{2} = \frac{11112}{2} \cdot 100001$.
Omdat $\frac{11112}{2} = \frac{5 \cdot 11112}{5 \cdot 2} = \frac{55560}{10} = 5556$ *vinden we dat* $s = 5556 + 555600000 = 555605556$. *Het aantal vijven is in dit geval gelijk aan 6.*

We lossen nu de eigenlijke opgave op. Merk op dat $10^{2013} = 1 + 9 \cdot 11\ldots1$ (2013 enen). Noem voor het gemak $n = 11\ldots1$ het getal bestaande uit 2013 enen. We zien dat de som

$$S = 1 + (1 + 9) + (1 + 2 \cdot 9) + \cdots + (1 + n \cdot 9)$$

precies $n + 1$ termen heeft, met gemiddelde waarde $\frac{1+10^{1023}}{2}$. Dus $S = \frac{n+1}{2} \cdot (1 + 10^{2013})$.
Uitwerken van de breuk $\frac{n+1}{2}$ geeft:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5n+5}{10} = \frac{555\ldots560}{10} = 555\ldots56,$$

een getal met 2011 vijven gevolgd door een 6. Omdat de laatste 2013 cijfers van het getal $10^{2013} \cdot \frac{n+1}{2}$ allemaal nullen zijn, is er geen 'overlap' tussen de niet-nullen van $\frac{n+1}{2}$ en $10^{2013} \cdot \frac{n+1}{2}$.
We vinden nu dat

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{n+1}{2} \cdot (1 + 10^{2013}) \\ &= \tfrac{n+1}{2} + 10^{2013} \cdot \tfrac{n+1}{2} \\ &= 55\ldots56055\ldots56. \end{aligned}$$

Dus S is een getal dat precies $2011 + 2011 = 4022$ vijven bevat. □