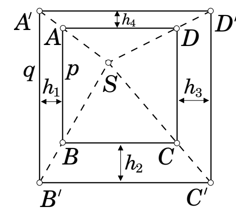
# Tweede ronde
# Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 12 september 2008
Technische Universiteit Eindhoven

## Uitwerkingen




**1.** Gegeven is een vierkant $ABCD$ en een punt $S$ binnen dit vierkant. Dit vierkant gaat onder puntvermenigvuldiging vanuit $S$ met een zekere factor $k > 1$ over in een vierkant $A'B'C'D'$. Bewijs dat de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $A'ABB'$ en $C'CDD'$ gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $B'BCC'$ en $D'DAA'$.

**Oplossing** Noem $|AB| = p$ en $|A'B'| = q$ $(= k \cdot p)$. Als gevolg van de puntvermenigvuldiging zijn de zijden $AB$ en $A'B'$ evenwijdig. Vierhoek $A'ABB'$ is dus een trapezium en daarvan is de oppervlakte gelijk aan die van de driehoeken $\triangle ABB'$ en $\triangle A'B'A$ samen, dus $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot |A'B'| \cdot h_1 = \frac{p+q}{2} h_1$, met $h_1$ de afstand tussen de evenwijdige lijnen $AB$ en $A'B'$.

Analoog vinden we dat de oppervlakte van vierhoek $C'CDD'$ gelijk is aan $\frac{p+q}{2} h_3$, met $h_3$ de afstand tussen $CD$ en $C'D'$. De totale oppervlakte van de twee trapezia is dus $\frac{p+q}{2}(h_1+h_3)$. Voor het andere paar overliggende vierhoeken vinden we analoog als totale oppervlakte $\frac{p+q}{2}(h_2 + h_4)$. Merk nu op dat $h_1 + h_3 = q - p = h_2 + h_4$, waaruit het gevraagde volgt. $\square$

**2.** Bepaal alle paren positieve gehele getallen $(m, n)$ waarvoor geldt

$$3 \cdot 2^n + 1 = m^2.$$

**Oplossing** De vergelijking laat zich herschrijven tot $3 \cdot 2^n = (m-1)(m+1)$. Vanwege $n > 0$ is $3 \cdot 2^n$ even, dus $m-1$ of $m+1$ is even, dus beide zijn even. Omdat het verschil tussen $m-1$ en $m+1$ slechts 2 is, kunnen ze niet beide meer dan één factor 2 bevatten, dus bevat één van de twee factoren $m-1$ en $m+1$ precies één factor 2. Deze ene factor bevat al dan niet ook de factor 3 en is dus gelijk aan 2 of 6; de andere factor is 2 hoger of juist 2 lager.

Als de ene factor 2 is, dan moet de andere factor dus 0 of 4 zijn, wat in beide gevallen geen oplossing geeft (want de andere factor moet van de vorm $3 \cdot 2^{n-1}$ zijn). Als de ene factor 6 is, dan is de andere 4 of 8, en beide mogelijkheden leiden tot een oplossing (want de andere factor moet nu van de vorm $2^{n-1}$ zijn). We concluderen dat er precies twee oplossingen zijn: $(m, n) = (5, 3)$ en $(m, n) = (7, 4)$. $\square$

**3.** Gegeven zijn 756 willekeurige verschillende gehele getallen tussen 1 en 2008 (waarbij 1 en 2008 ook mee mogen doen). Deze verzameling gekozen getallen noemen we $S$.
Bewijs dat er twee verschillende gehele getallen $a$ en $b$ zijn in $S$ waarvoor geldt dat $a + b$ deelbaar is door 8.

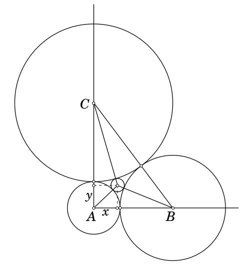
**Oplossing** We verdelen de getallen 1 tot en met 2008 over acht bakjes, genummerd $V_1$ tot en met $V_8$, met in bakje $V_i$ de 251 getallen van de vorm $8k + i$ met $0 \leq k \leq 250$:

$$V_1 = \{1, 9, \ldots, 2001\}, \quad \ldots, \quad V_8 = \{8, 16, \ldots, 2008\}.$$

De bakjes bevatten samen precies de getallen 1 tot en met 2008. We bewijzen nu het gevraagde uit het ongerijmde. Stel dat er geen twee verschillende getallen $a$ en $b$ bestaan zodat $a + b$ deelbaar is door 8. We kijken wat dat betekent voor de verdeling van de getallen van $S$ over de bakjes. Omdat de som van twee achtvouden deelbaar is door 8, zit er hoogstens één getal uit $S$ in $V_8$.

Omdat de som van een achtvoud plus 4 en een achtvoud plus 4 deelbaar is door 8, zit er ten hoogste één getal uit $S$ in $V_4$. De som van een getal dat in bakje $V_1$ zit en een getal dat in bakje $V_7$ zit, is ook altijd deelbaar door 8, dus in minstens één van deze twee bakjes zitten geen getallen van $S$. Hetzelfde geldt voor minstens één van de bakjes $V_2$ en $V_6$ en voor minstens één van de bakjes $V_3$ en $V_5$. In elk bakje zitten ten hoogste 251 getallen uit $S$, dus bevatten de bakjes $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_5$, $V_6$, $V_7$ samen ten hoogste $3 \cdot 251 = 753$ getallen uit $S$. De bakjes $V_1$ tot en met $V_8$ bevatten daarom ten hoogste 755 getallen uit $S$. Tegenspraak, want er zitten 756 getallen in $S$ en elk getal moet ergens in een bakje zitten. $\square$

**4.** Drie cirkels $C_1, C_2, C_3$ met stralen van lengte respectievelijk 1, 2 en 3 raken elkaar uitwendig. In het ingesloten gebied ligt een cirkeltje $C_4$ dat elk van de drie gegeven cirkels uitwendig raakt. Bereken de lengte van de straal van $C_4$.




**Oplossing** Noem de middelpunten van $C_1, C_2, C_3$ respectievelijk $A, B, C$. De driehoek gevormd door $A, B$ en $C$ heeft als zijden $|AB| = 3$, $|AC| = 4$ en $|BC| = 5$ en is dus rechthoekig. Kies een assenstelsel met de rechte hoek $A$ als oorsprong en de twee andere middelpunten op de assen: $B = (3, 0)$ en $C = (0, 4)$. Noem straal en middelpunt van $C_4$ respectievelijk $r$ en $M = (x, y)$. Dan geldt: $|AM| = r + 1$, $|BM| = r + 2$ en $|CM| = r + 3$. Dit leidt tot de volgende drie vergelijkingen met drie onbekenden:

$$r^2 + 2r + 1 = |AM|^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$
$$r^2 + 4r + 4 = |BM|^2 = (3 - x)^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \quad (2)$$
$$r^2 + 6r + 9 = |CM|^2 = x^2 + (4 - y)^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \quad (3)$$

Het verschil van (1) en (2) geeft $6x - 9 = -2r - 3$, dus $6x = 6 - 2r$, dus $x = \frac{3-r}{3}$. Het verschil van (1) en (3) geeft $8y - 16 = -4r - 8$, dus $8y = 8 - 4r$, dus $y = \frac{2-r}{2}$. Invullen in (1) geeft de vergelijking $r^2 + 2r + 1 = x^2 + y^2 = \frac{(3-r)^2}{9} + \frac{(2-r)^2}{4} = \frac{9-6r+r^2}{9} + \frac{4-4r+r^2}{4}$, dus

$$\tfrac{23}{36}r^2 + \tfrac{11}{3}r - 1 = 23\left(\tfrac{r}{6}\right)^2 + 22\left(\tfrac{r}{6}\right) - 1 = 0.$$

Met $p = \frac{r}{6}$ gaat deze vergelijking over in $0 = 23p^2 + 22p - 1 = (23p - 1)(p + 1)$, dus $\frac{r}{6} = p = -1$ (maar dat geeft $r = -6 < 0$, dus deze oplossing vervalt) of $23 \cdot \frac{r}{6} = 23p = 1$, dus $r = \frac{6}{23}$. (Hieruit kunnen we op zijn beurt weer afleiden dat $M = (x, y) = (\frac{21}{23}, \frac{20}{23})$.) □

**5.** We spelen een spel met een rij van 2008 gehele getallen. Alle getallen in de rij zijn groter dan of gelijk aan 0. Een *zet* bestaat uit het kiezen van een getal $b$ uit de rij, waarvan de twee buurgetallen $a$ en $c$ positief (dus groter dan 0) zijn. We vervangen dan $a$, $b$ en $c$ door respectievelijk $a - 1$, $b + 7$ en $c - 1$. Het eerste en het laatste getal van de rij mogen niet gekozen worden omdat ze maar één buur hebben.

Als we geen getal $b$ meer kunnen vinden waarvan beide buurgetallen positief zijn, kunnen we geen zet meer doen en stopt het spel.

Bewijs dat het spel altijd op een gegeven moment stopt, met welke rij getallen we ook beginnen en welke zetten we ook doen.

**Oplossing** Bekijk een willekeurige beginrij $n_1, n_2, \ldots, n_{2008}$ en een willekeurige rij zetten. Het eerste getal $n_1$ neemt elke keer met 1 af wanneer we $b = n_2$ kiezen; dan is immers $a = n_1$. Als we voor $b$ een andere $n_k$ kiezen, blijft $n_1$ onveranderd. We kunnen dus maar hooguit $n_1$ keer $b = n_2$ kiezen. Ergens in onze chronologische rij zetten wordt $b = n_2$ dus voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet); vanaf de daaropvolgende zet (resp. de eerste zet) kiezen we dus alleen nog $b = n_3$ tot en met $b = n_{2007}$. We bekijken nu de rest van de zetten vanaf deze genoemde zet. Laat $n_2$ nu de waarde zijn van het het tweede getal bij aanvang van die zet (bedenk dat $n_2$ in de zetten daarvoor steeds met 7 is opgehoogd bij elke zet $b = n_2$ en met 1 is verlaagd bij elke zet $b = n_3$, dus de nieuwe waarde van $n_2$ kan heel anders zijn dan de beginwaarde). Vanaf die zet neemt $n_2$ elke keer met 1 af wanneer we $b = n_3$ kiezen, en als we voor $b$ een andere $n_k$ kiezen ($b = n_4$ tot en met $b = n_{2007}$) blijft $n_2$ onveranderd. We kunnen vanaf die zet dus maar hooguit $n_2$ keer $b = n_3$ kiezen. Ergens in onze rij zetten vanaf die zet wordt $b = n_3$ dus voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet); vanaf de daaropvolgende zet (resp. nog steeds de eerder genoemde zet) kiezen we dus alleen nog $b = n_4$ tot en met $b = n_{2007}$. Dit argument kunnen we blijven herhalen, totdat we concluderen: ergens in onze rij zetten vanaf een zekere zet wordt $b = n_{2007}$ voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet). Nu waren alle andere $b = n_k$ al eerder voor de laatste keer gekozen; vanaf deze zet kan er daarom geen enkele zet $b = n_k$ meer gekozen worden en is ons spel dus afgelopen. □

*Een wat kortere variant, waarin we ons argument niet 2005 maal hoeven te herhalen, vinden we met technieken uit katern 4 van de tweederondetraining. Het bewijs gaat nu uit het ongerijmde:*

**Variant** Stel dat er een oneindige rij zetten is. Uit het (oneindige) ladenprincipe volgt dat er ten minste een zet $b = n_k$ is die oneindig vaak voorkomt. Kies nu $k$ minimaal zodat $b = n_k$ oneindig vaak voorkomt (extremenprincipe). Het getal $n_{k-1}$ wordt alleen maar opgehoogd (namelijk met 7) bij een zet $b = n_{k-1}$ en dat gebeurt dan maar eindig vaak. Het wordt echter oneindig vaak met 1 verlaagd, namelijk bij elke zet $b = n_k$; tegenspraak. □

**Alternatieve oplossing** Voor elke rij van 2008 elementen $n_1, n_2, \ldots, n_{2008}$ berekenen we een gewogen som, namelijk met de gewichten $7, 7^2, 7^3, 7^4, \ldots$, dus

$$S = 7 \cdot n_1 + 7^2 \cdot n_2 + 7^3 \cdot n_3 + \cdots + 7^{2007} \cdot n_{2007} + 7^{2008} \cdot n_{2008}.$$

Als we in deze rij $a, b, c$ vervangen door $a - 1, b + 7, c - 1$, zeg met $b = n_k$ $(2 \leq k \leq 2007)$, dan wordt $S$ door $S - 7^{k-1} + 7 \cdot 7^k - 7^{k+1} = S - 7^{k-1}$ vervangen, dus $S$ wordt met elke stap kleiner. Anderzijds is $S$ volgens zijn definitie als gewogen som van gehele getallen groter dan of gelijk aan 0 zelf ook altijd een geheel getal groter dan of gelijk aan 0. Als we na elke zet de nieuwe $S$ opschrijven, krijgen we dus een dalende rij gehele getallen. Omdat deze getallen nooit negatief mogen worden, kan deze rij niet oneindig lang zijn. Het spel moet daarom wel stoppen. □