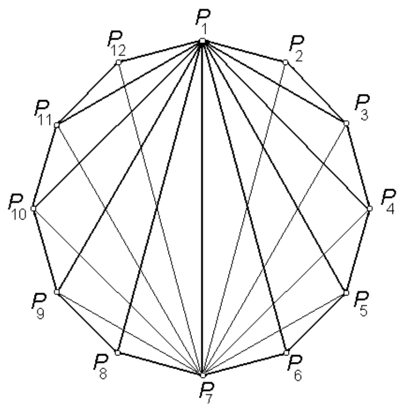
Uitwerkingen van de opgaven van de 2e ronde 2005 van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

1. Als de $a+b$ een 5-voud is, dan moet een van de volgende gevallen waar zijn:
a) beide getallen zijn een 5-voud, of
b) één getal is een 5-voud+1 en het andere is een 5-voud+4, of
c) één getal is een 5-voud+2 en het andere een 5-voud+3.
Onder de 2005 getallen 401 5-vouden, 401 5-vouden+1, 401 5-vouden+2, 401 5-vouden+3 en 401 5-vouden+4.
In geval a) zijn er $\frac{401\times 400}{2}$ mogelijkheden,
in geval b) 401×401 en in geval c) ook 401×401 .
In totaal dus $80200+160801+160801=401802$.



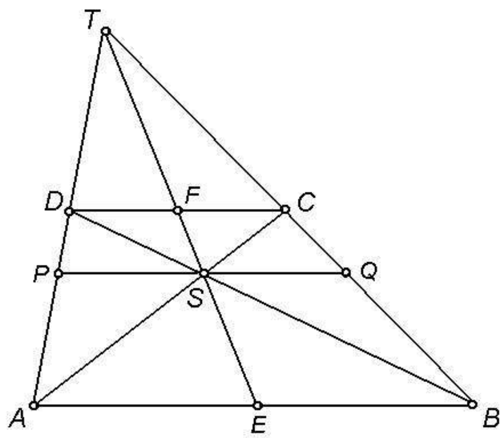
2. $P_1P_7, P_2P_8, P_3P_9, P_4P_{10}, P_5P_{11}$ en P_6P_{12} zijn diagonalen zijn van de omgeschreven cirkel van de veelhoek. De hoeken

$P_1P_2P_7,\quad P_1P_3P_7,\dots,\quad P_1P_6P_7,\quad P_1P_8P_7,\quad P_1P_9P_7,\dots,\quad P_1P_{12}P_7$ zijn allemaal $90°$. Alle driehoeken met een middellijn als zijde en een derde hoekpunt van de veelhoek als hoekpunt zijn rechthoekig. Toepassen van de stelling van Pythagoras levert:

$$|P_1P_2|^2+|P_1P_4|^2+|P_1P_6|^2+|P_1P_8|^2+|P_1P_{10}|^2+|P_1P_{12}|^2=|P_1P_2|^2+|P_1P_8|^2+|P_1P_4|^2+|P_1P_{10}|^2+|$$
$$=|P_2P_8|^2+|P_4P_{10}|^2+|P_6P_{12}|^2=|P_1P_7|^2+|P_3P_9|^2+|P_5P_{11}|^2=|P_1P_7|^2+|P_1P_3|^2+|P_1P_9|^2+|P_1P_5|^2.$$

3. We ordenen de vijf getallen van klein naar groot en noemen ze voor het gemak *a,b,c,d*, en *e* , dus $a<b<c<d<e$. Dan geldt: $a+b<a+c<a+d<a+e<b+e<c+e<d+e$. Dus voldoet de kleinste waarde van m aan: $m\geq 7$. Met het voorbeeld $a=1, b=2, c=3, d=4$ en $e=5$ vinden we voor de sommen 3,4,5,6,7,8 en 9. Dus is 7 de kleinst mogelijke waarde van *m*.

4. Noem de snijpunten van de lijn door *T* en *S* met *AB* en *CD* respectievelijk *E* en *F*. Trek een lijn door *S* evenwijdig aan *AB* en *CD* en noem de snijpunten met *AD* en *BC* resp. *P* en *Q*. Dan geldt
$DF : FC = PS : SQ = AE : EB$.
We zijn dus klaar als we bewijzen dat $PS = SQ$.
Driehoek *APS* is gelijkvormig met driehoek *ADC*, dus $PS : DC = AP : AD$. Driehoek *BQS* is gelijkvormig met driehoek *BCD* dus $SQ : DC = BQ : BC$. Maar $BQ : BC = AP : AD$, dus $PS : DC = SQ : DC$. Daaruit volgt direct $PS = SQ$ en daarmee is het bewijs rond.



5. Als we met een aantal beurten alleen één munt op het bord kunnen omdraaien, dan zijn we klaar. We kunnen dan achtereenvolgens elke munt die niet goed ligt omdraaien tot alle munten goed liggen. Veronderstel dat alle munten op munt (-) liggen. We laten zien dat na een aantal beurten bijv. alleen de munt op C4 met kop naar boven ligt. Door eerst acht beurten uit te voeren, achtereenvolgens op A4, B4, C4, D4, E4, F4, G4 en H4 (fig. 1) krijgen we een situatie waarin in rij 1, rij 2, rij 3, rij 5, rij 6, rij 7 en rij 8 alle munten één maal omgedraaid zijn. In rij 4 zijn alle munten acht maal omgedraaid, daar liggen ze dus net zo als in het begin (fig 2). Dan voeren we zeven beurten uit, achtereenvolgens op C1, C2, C3, C5, C6, C7 en C8. Daarmee worden alle munten buiten de C-kolom in rij 1, rij 2, rij 3, rij 5. rij 6, rij 7 en rij 8 weer één keer omgedraaid. Alle 49 munten van het schaakbord die niet in rij 4 of kolom C liggen, liggen dan weer zoals ze in het begin lagen. In kolom C zijn alle munten dan zeven keer omgedraaid: daarmee liggen de munten in C1, C2, C3, C5, C6, C7 en C8 weer op munt (-), en C4 ligt met kop (+) naar boven, en alleen die munt is dus omgedraaid t.o.v. zijn beginpositie (fig. 3).

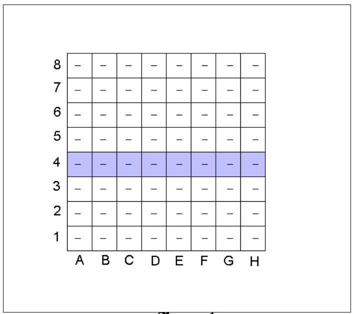


fig. 1

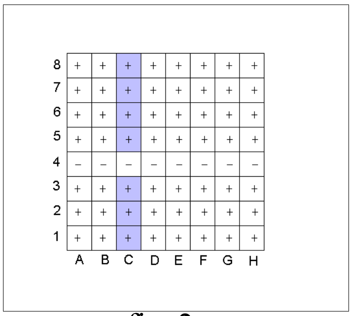


fig. 2

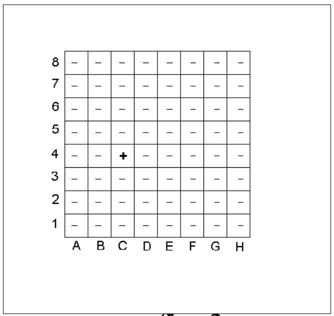


fig. 3