Oplossingen van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2004.

1. Ontbind 2004: $2004 = 2 \times 2 \times 3 \times 167$. Omdat het aantal paren niet afhangt van de *waarde* van de priemgetallen, maar alleen van het aantal priemgetallen en hun exponent, schrijven we verder i.p.v. 2004 p^2qr . De paren worden als volgt geordend: het getal met de meeste priemfactoren als eerste getal, bij een gelijk aantal alfabetisch. Bij gegeven waarden van *p, q* en *r* zijn de gevonden paren dan direct te schrijven als (a,b) met $a \le b$.

Om te beginnen hebben we alle paren die bestaan uit p^2qr en een van zijn delers.

Dat zijn er 12, $[\, p^2qr, p^2q, p^2r, pqr, p^2, pq, pr, qr, p, q, r, 1\,]$. (12)

Dan nog paren met eerste getal p^2q en het tweede getal dus een r-voud: $(p^2q,r),(p^2q,rp),(p^2q,rp^2),(p^2q,rq)$. (4)

Vervolgens paren met eerste getal p^2r : $(p^2r,q),(p^2r,qp),(p^2r,qr)$. (3)

Dan nog paren met eerste getal pqr : $(pqr,p^2),(pqr,p^2q),(pqr,p^2r)$. (3)

En tenslotte nog een paar met eerste getal p^2 : (p^2,qr) (1)

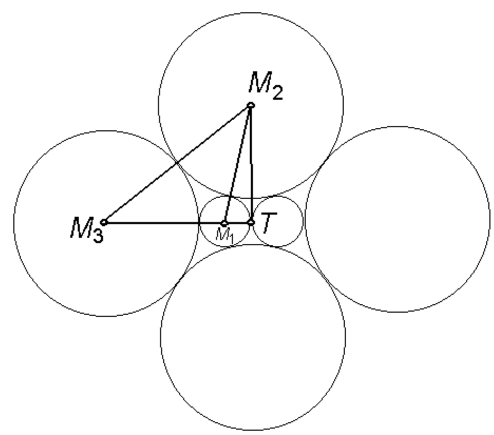
Dus zijn er in totaal $12+4+3+3+1=23$ paren.

2. Noem de middelpunten van de cirkels *A*, *P* en *S* achtereenvolgens: M_1, M_2 en M_3 . T is het raakpunt van de cirkels *A* en *B* .

$M_1M_2{}^2 - M_1T^2 = M_2T^2 = M_3M_2{}^2 - M_3T^2$.

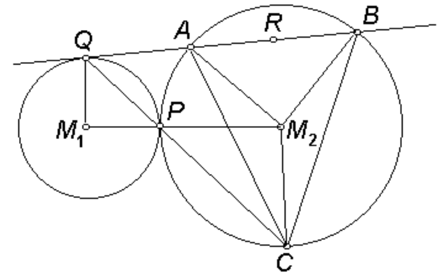
$(r+1)^2 - 1^2 = (r+r)^2 - (r+2)^2$, dus

$r^2 - 3r - 2 = 0$, dus $r = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$



3 Om te beginnen ligt er één stapel van 100 kaartjes, en aan het eind liggen er 100 stapels met 1 kaartje. Daartussen zijn er situaties met 99, 98,… stapeltjes. Voor elk van die situaties wordt de *waarde* als volgt gedefinieerd: bepaal voor elk stapeltje het aantal paren dat je in dat stapeltje kunt kiezen en tel die aantallen bij elkaar op. De *waarde* van de beginsituatie (1 stapel met 100 kaartjes) is dan gelijk aan $\frac{100\times 99}{2}$ en de *waarde* van de eindsituatie (100 stapels met 1 kaartje) is dan gelijk aan 0. Bij de overgang van een situatie naar een volgende situatie wordt telkens één stapeltje gesplitst in twee kleinere stapeltjes. Telkens als je een stapeltje met *k* kaartjes in twee kleinere stapeltjes splitst, zeg één met *a* en het andere met *k-a*, scoor je het product van de aantallen van beide deelstapeltjes, dus $a \times (k-a)$. Maar de *waarde* neemt af: vóór de splitsing heb je alle paren binnen het stapeltje van *k*, na de splitsing tellen alle paren die bestaan uit één kaartje uit het stapeltje van *a* kaartjes en één kaartje uit het stapeltje van $k-a$ kaartjes niet meer mee, en heb je dus $a \times (k-a)$ paren minder. Je scoort dus telkens precies wat je aan *waarde* verliest. Dus heb je aan het einde altijd een totaalscore van $\dfrac{100 \times 99}{2} = 4950$, onafhankelijk van de tussenliggende situaties.

4. M_1 is het middelpunt van C_1 en M_2 is het middelpunt van C_2. *P* ligt op M_1M_2. Driehoek ABM_2 is gelijkbenig, dus het midden van *AB*, *R*, is ook het voetpunt van de hoogtelijn uit M_2. Verder zijn de driehoeken PQM_1 en PCM_2 gelijkbenig en geldt $\angle QPM_1 = \angle CPM_2$. Dus $\angle PQM_1 = \angle PCM_2$ en $M_1Q \,/\!/\, M_2C$ en omdat M_1Q loodrecht staat op de raaklijn aan cirkel C_1 in *Q*, staat M_2C ook loodrecht op deze raaklijn, dus loodrecht op *AB*.



Aangezien de loodlijn vanuit *C* op *AB* door M_2 gaat is deze gelijk aan de loodlijn uit M_2 en gaat deze dus ook door *R*, het midden van *AB*. Dus driehoek *ABC* is gelijkbenig met tophoek *C*. (Als *AB* een middellijn van C_2 is, dan vallen *R* en M_2 samen. Het bewijs is in dat geval korter.)

5. $p^{2m} + q^{2n} = (2k+1)^2$. Omdat het rechterlid een oneven getal is kunnen *p* en *q* niet beide even of beide oneven zijn. Veronderstel dat *p* even is dan moet gelden $p = 2$ en *q* is een oneven priemgetal groter dan 2.
Dus $q^{2n} = (2k+1)^2 - (2^m)^2 = (2k+1+2^m)(2k+1-2^m)$. Dus moet *q* een deler zijn van $(2k+1+2^m)$. Als *q* ook een deler is van $(2k+1-2^m)$ dan moet *q* ook een deler zijn van het verschil van de twee factoren, dus van 2×2^m en dat kan niet omdat *q* oneven moet zijn. Dat betekent dat $(2k+1-2^m) = 1$ en dus $2k = 2^m$ Het gevolg is: $q^{2n} = (2^m + 1 + 2^m) = 2^{m+1} + 1$. Dus $q^{2n} - 1 = (q^n + 1)(q^n - 1) = 2^{m+1}$. Omdat *q* oneven is kan $(q^n - 1)$ niet gelijk zijn aan 1. Dus moeten beide factoren een macht van 2 zijn. Omdat het verschil van $(q^n + 1)$ en $(q^n - 1)$ gelijk is aan 2 zoeken we twee machten van 2 die een verschil hebben van 2. Dat zijn alleen 2 en 4. Dus $q^n = 3$ en dus $q = 3$ en $n = 1$. Daaruit volgt direct dat $3^2 - 1 = 2^{m+1}$ en dus $m = 2$
De enige oplossing is dus de bekende 3,4,5 driehoek.

De Nederlandse Olympiade wordt mogelijk gemaakt door financiële bijdragen en steun van:

Het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Het Koninklijk Wiskundig Genootschap
De Technische Universiteit Eindhoven
De Citogroep
AKZO/NOBEL
Natuurwetenschap en Techniek
Gratama Stichting