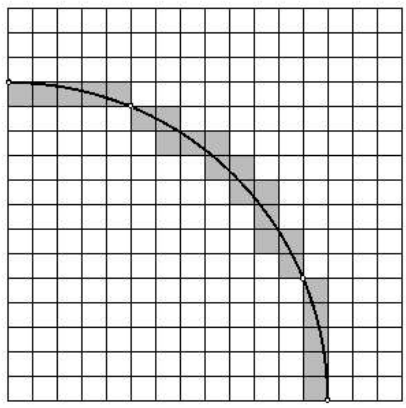
1e ronde 2005 oplossingen

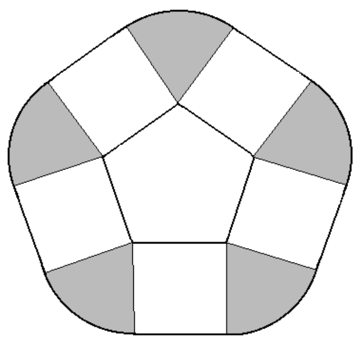
A1. Het kleinste getal dat je als som van zeven getallen kunt maken is:
$0+1+2+3+4+5+6=21$. Door het laatste getal telkens te vervangen krijg je:
$0+1+2+3+4+5+7=22$,
$0+1+2+3+4+5+8=23$,
$0+1+2+3+4+5+9=24$. Daarna het voorlaatste getal vervangen:
$0+1+2+3+4+6+9=25$ … enzovoort. Het laatste en grootste getal wordt zo:
$3+4+5+6+7+8+9=42$, met alle tussenliggende getallen, dus 21 t/m 42 .
In totaal dus 22 getallen.

A2. Er zijn drie armbanden met kralen van één kleur: $\begin{array}{ccc} r & - & r \\ | & & | \\ r & - & r \end{array}$, $\begin{array}{ccc} w & - & w \\ | & & | \\ w & - & w \end{array}$, en $\begin{array}{ccc} b & - & b \\ | & & | \\ b & - & b \end{array}$.
Met twee kleuren heb je wat betreft de kleuren 3 mogelijkheden. Voor elk van die mogelijkheden, bijv. *rw*, heb je de armbanden: $\begin{array}{cc} r & r \\ r & w \end{array}$, $\begin{array}{cc} r & r \\ w & w \end{array}$, $\begin{array}{cc} r & w \\ w & r \end{array}$ en $\begin{array}{cc} r & w \\ w & w \end{array}$.
In totaal worden dat dus 12 mogelijkheden met twee kleuren.
Met drie kleuren heb je drie mogelijkheden wat betreft de verdeling van de kleuren over de kralen, omdat je dan twee kralen van dezelfde kleur moet hebben. Met de combinatie *rrwb* heb je de volgende twee armbanden: $\begin{array}{cc} r & r \\ b & w \end{array}$ (pas op: $\begin{array}{cc} r & r \\ w & b \end{array}$ is dezelfde!) en $\begin{array}{cc} r & w \\ b & r \end{array}$ (= $\begin{array}{cc} r & b \\ w & r \end{array}$) .
Dus met drie kleuren totaal 6. Alle mogelijkheden bij elkaar: $3+12+6=21$.

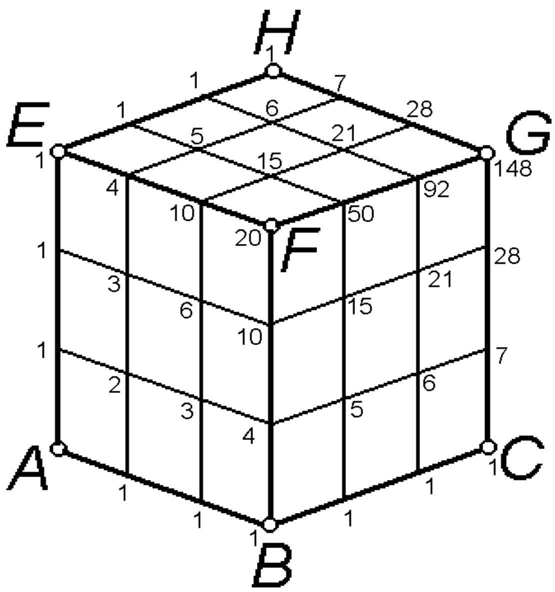
A3. Het is voldoende om de cirkel alleen te bekijken in het eerste kwadrant, omdat je met draaien daaruit de rest van de cirkel op het ruitjespapier kunt maken.
De punten die precies op de cirkel liggen zijn (0,13), (5,12), (12,5) en (13,0). Ze zijn met een open cirkeltje in de figuur aangegeven. Als je langs de cirkelboog van (0,13) naar (13,0) loopt dan passeer je 12 keer een horizontale roosterlijn en 12 keer een verticale roosterlijn. Als je zo'n lijn passeert dan kom je in een nieuw vierkantje terecht. Het aantal vierkantjes waar je door gaat is dan $2\times 12+1-2$, "+1" vanwege het vierkantje waarin je begint en - 2 omdat je bij het passeren van (5,12) en (12,5) wel twee roosterlijnen passeert maar in één nieuw vierkantje komt. Voor de kwartcirkel dus 23 vierkantjes en voor de hele cirkel 92 vierkantjes.



A4. Het langste lijnstuk binnen een cirkel is een middellijn. Gedurende het rollen is er altijd een middellijn die de afstand bepaalt tot het punt dat op dat moment het verst van de vijfhoek afligt. Zolang de cirkel langs een zijde rolt, wordt de buitengrens dus een lijnstuk evenwijdig aan de zijde. Als de cirkel om een hoekpunt rolt, beschrijft de middellijn een cirkelboog. De oppervlakte van het gebied dat door de cirkel bestreken wordt, is dus gelijk aan vijf vierkanten met zijde 4 en vijf cirkelsectoren (taartpunten) die samen een cirkel vormen met straal 4. De gevraagde oppervlakte is : $5\times 4^2+\pi\times 4^2=16(5+\pi)$.

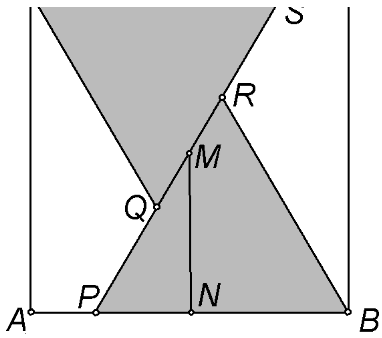


A5. In de figuur staat bij elk punt een getal dat aangeeft op hoeveel manieren je beginnend in A bij dat punt kunt komen via een kortste route. Dat getal is gelijk aan de som van de getallen die bij de punten staan die direct vóór dat punt op de kortste route liggen. Dat is soms maar één punt (op *AE*, *EH*, *AB*, *BC*), meestal zijn het twee punten en voor de punten op *FG*, met uitzondering van *F*, zijn het er drie. Het antwoord is 148, het getal dat bij *G* staat.



B1.Verbind het midden M van PS met het midden N van AB. Driehoek MPN is een 30-60-90 driehoek, waarbij $MN=2$ en dus $PN=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Conclusie: $PB=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$. Gevraagd wordt dus tweemaal de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde $2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$. De halve basis is dus $1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en de hoogte $\sqrt{3}+1$. De gevraagde oppervlakte is dus $2\times(1+\frac{1}{3}\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})=4+\frac{8}{3}\sqrt{3}$.



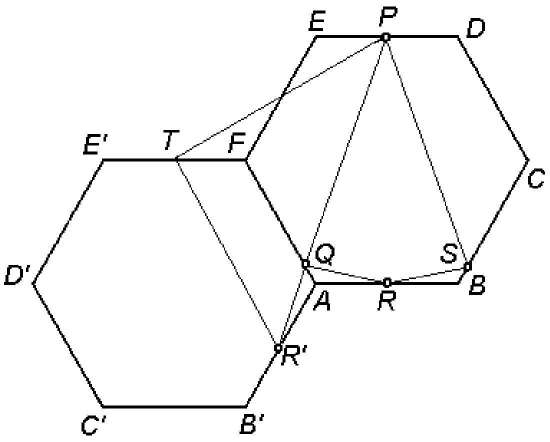
B2. De operatie *C* maakt een getal altijd 7 groter, *A* maakt een getal (als het positief is) met een factor 100 groter. *A* heeft meer effect dan *C* als $100\times x>x+7$, dus als $x>7/99\approx 0,07$. Kwadrateren, operatie *F,* heeft meer effect dan *A* op een positief getal x als $x^2>100x$ dus als $x>100$. Als we na een aantal operaties een getal groter dan 100 (of eventueel een getal kleiner dan -100) krijgen , dan heeft *F* daarna het grootste effect. Operatie *E* levert een groter getal op als *E* toegepast wordt op een getal x met $0<x<1$, anders wordt het getal kleiner.
Al deze overwegingen bij elkaar:
16 (*B*) 0,16 (*E*) 0,4 (*C*) 7,4 (*A*) 740 (*F*) 740^2 . Operatie *D* tot slot levert: 740^2-7 (=547593).
Daarbij worden de operaties *A*, *C*, *E* en *F* op hun best gebruikt. Andere mogelijkheden:
16 (*D*) 9 (*B*) 0,09 (*E*) 0,3 (*C*) 7,3 (*A*) 730 (*F*) 730^2 en dat is minder.
Via negatieve getallen wordt geen beter resultaat bereikt, want :
16 (*E*) 4 (*B*) 0,04 (*D*) $-6,96$ (*A*) -696 (*F*) 696^2 (*C*) 696^2+7 of
16 (*B*) 0,16 (*E*) 0,4 (*D*) $-6,6$ (*A*) -660 (*F*) 660^2 (*C*) 660^2+7 .
Het beste resultaat levert *BECAFD* .

B3. Vanwege de symmetrie van de figuur in de lijn *PR* kunnen we ons bij het uitrekenen van de lengte van *PQRSP* beperken tot de lengte van *PQR*, de helft van de baan. $PQF = \quad RQA$
Spiegel *ABCDEF* in de lijn *AF* , zie figuur.
$R'QA = \quad RQA$, dus $PQF = \quad R'QA$.
Dus ligt *Q* op *PR'*. Dus de lengte van de baan *PQR* is gelijk aan de lengte van *PR'*. Laat *T* het midden zijn van *E'F*. $PT = FD = 4\sqrt{3}$, want driehoek *AFD* is een $30°\ 60°\ 90°$ -driehoek met $AF=4,\ AD=8,\ FD=4\sqrt{3}$.

$TR' = \frac{AF + E'B'}{2} = 6$, dus

$PR' = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ Dus

$PQRSP = 4\sqrt{21}$.



B4 We lossen eerst het probleem op zonder de voorwaarde $a<b<c$. Veronderstel dat er 2005 turven op een rij staan, dan kunnen we door op twee plaatsen een schotje in de rij te zetten de 2005 turven verdelen in drie groepen. Elke manier van twee schotjes zetten levert een oplossing van het probleem. Omdat er bij een rij van 2005 turven 2004 plaatsen tussen de turven zijn en we 2 schotjes moeten zetten, zijn er $\frac{2004 \times 2003}{2} = 2007006$ mogelijkheden.
Omdat 2005 niet deelbaar is door 3 is er geen oplossing met drie dezelfde getallen. Wel zijn er oplossingen met twee dezelfde getallen. Die tellen we: 1+1+2003, 2+2+2001, … , 1002+1002+1, en omdat elke combinatie op drie manieren voorkomt onder de 2007006 mogelijkheden (bijv: 1+1+2003, 1+2003+1 en 2003+1+1) zijn er dus $3 \times 1002 = 3006$ oplossingen met een paar dezelfde getallen. Er blijven dus $2007006 - 3006 = 2004000$ oplossingen over met drie verschillende getallen. Met drie verschillende getallen kun je zes oplossingen maken waarvan er één voldoet aan $a<b<c$. Dus onder de voorwaarde $a<b<c$ zijn er $2004000 : 6 = 334000$ oplossingen.