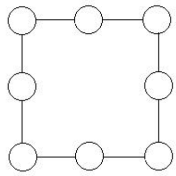
opgaven voor de eerste ronde
vrijdag 17 januari 2003
beschikbare tijd: 120 minuten

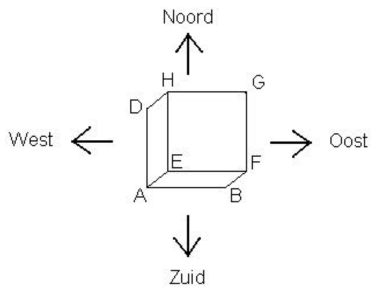
Lees voor je begint het volgende:

- Van elke opgave wordt alleen het eindantwoord gevraagd, geen tussenoplossingen of uitwerkingen. Werk dus rustig en nauwkeurig; een rekenfout kan maken dat je oplossing helemaal fout wordt gerekend.
- LET OP! Geef je antwoorden in exacte vorm, zoals bijvoorbeeld: $\frac{17}{81}$, $2+\sqrt{3}$, $p+1$
- Het is een wedstrijd en geen examen. Daarom is het te verwachten dat maar weinigen alle antwoorden goed zullen hebben. Maak je dus niet ongerust als je maar een deel van de opgaven hebt opgelost.
- Het gaat er om dat je plezier hebt aan het werken aan ongewone wiskundeopgaven.
- Het gebruik van zakrekenmachines en formulekaarten is niet toegestaan.
- De waardering is als volgt: Categorie A twee punten per opgave en categorie B drie punten per opgave.

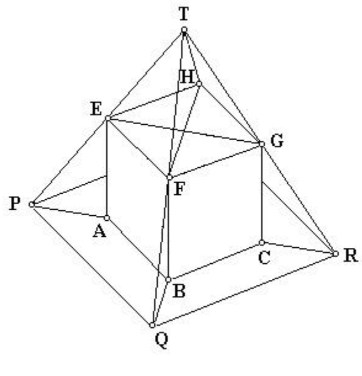
A1. De getallen 1,2,3,4,5,6,7 en 8 moeten zo over de rondjes in de figuur verdeeld worden dat de som van de drie getallen op elk van de vier zijden van het vierkant hetzelfde is.
Geef een oplossing waarbij geldt dat die som minimaal is.



A2. Een grote kubus $\begin{matrix}EFGH\\ABCD\end{matrix}$ staat met vlak $ABCD$ op de grond. Het voorvlak $ABFE$ is op het zuiden gericht. Els kan de kubus niet optillen maar wel zó kantelen dat één ribbe op zijn plaats blijft. Dus als ze de kubus bijvoorbeeld één keer naar het oosten kantelt dan komt vlak $BFGC$ op de grond en is vlak $EFGH$ naar het oosten gericht. Vanaf de eerstgenoemde beginstand kantelt ze de kubus eerst vijf keer naar het oosten, vervolgens vijf keer naar het noorden, vervolgens vijf keer naar het westen en tenslotte weer vijf keer naar het zuiden. De kubus staat dan weer op zijn oorspronkelijke plaats, maar hoekpunten kunnen van plaats veranderd zijn.
Geef alle hoekpunten die weer op hun oorspronkelijke plaats terecht gekomen zijn.

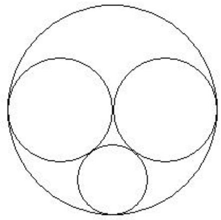


A3. In een regelmatige vierzijdige piramide $\begin{matrix}T\\PQRS\end{matrix}$ waarvan alle ribben de lengte 1 hebben bevindt zich een kubus $\begin{matrix}EFGH\\ABCD\end{matrix}$.
Het grondvlak $ABCD$ van de kubus ligt in het grondvlak $PQRS$ van de piramide en de hoekpunten E, F, G en H liggen op de ribben PT, QT, RT en ST .
Bereken de lengte van de ribbe van de kubus.



A4. Elk natuurlijk getal van twee cijfers kun je achterstevoren opschrijven. Zo kun je 15 omdraaien tot 51. Er zijn getallen van twee cijfers met de eigenschap dat het getal opgeteld bij zijn omgedraaide een getal oplevert dat het kwadraat is van een geheel getal.
Bepaal alle getallen met die eigenschap.

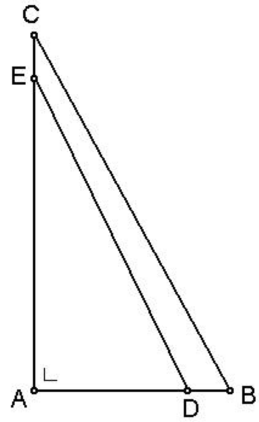
A5. Binnen een cirkel met straal 2 bevinden zich twee even grote cirkels met straal 1 die elkaar uitwendig raken en de grote cirkel inwendig raken. Buiten de twee kleine cirkels en binnen de grote cirkel bevindt zich een kleinere cirkel die de andere drie cirkels raakt.
Bereken de straal van die kleinste cirkel.



B1. Boven de camping waarop Huub kampeert loopt een kabelbaan met n genummerde gondeltjes. De gondeltjes hangen in een lus op onderling gelijke afstanden. Na gondeltje 1 komt gondeltje 2, na gondeltje 2 komt gondeltje 3, enz. en na gondeltje n komt weer gondeltje 1. Op een bepaald moment kijkt Huub recht naar boven en ziet gondeltje 42 en 94 precies naast elkaar overkomen, 42 naar links en 94 naar rechts. Een tijdje later kijkt Huub van dezelfde plaats weer naar boven en ziet gondeltje 185 en 35 naast elkaar overkomen, 185 naar links en 35 naar rechts.
Hoe groot is n ?

B2. Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met $AB = 8$, $AC = 15$ en $BC = 17$.
Op de zijde AB ligt punt D en op de zijde AC ligt punt E zó dat
- de oppervlakte van ADE gelijk is aan $\frac{3}{4}$ van de oppervlakte van ABC en
- de omtrek van ADE gelijk is aan de omtrek van $BCED$.

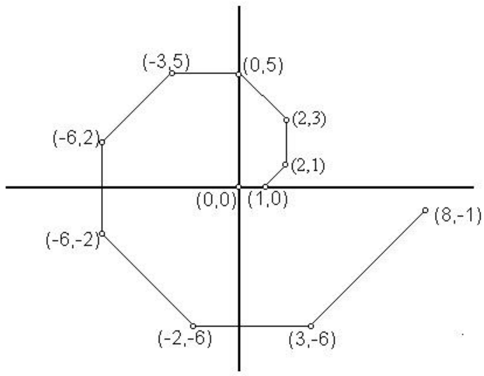
Bereken de lengte van DE.



B3. Bepaal de kleinste waarde van n waarvoor geldt:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$ is een veelvoud van 1000.

B4. Op een rooster wordt een soort spiraal als volgt getekend. De spiraal begint in punt (0,0)
1^e stap: 1 naar rechts
2^e stap: 1 diagonaal naar rechts boven
3^e stap: 2 naar boven
4^e stap: 2 diagonalen naar links boven
5^e stap: 3 naar links
6^e stap: 3 diagonalen naar links onder
enz.
In de figuur zijn de eerste 10 stappen getekend.
Je hebt dan roosterpunt (8,-1) bereikt.
Geef de coördinaten van het roosterpunt waarop de spiraal eindigt na 2003 stappen.



Het werk van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt mogelijk gemaakt door financiële bijdragen en steun van:

Het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Het Wiskundig Genootschap
De Universiteit van Eindhoven
De Citogroep
De Hogeschool van Utrecht
AKZO/NOBEL
Natuur en Techniek