**Van 8 tot 16 juli vond in het Argentijnse Mar del Plata de 53ste Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats. Nederland heeft het hier beter gedaan dan ooit: Jetze Zoethout en Jeroen Huijben kwamen thuis met een gouden medaille. Slechts twee keer eerder in de geschiedenis behaalde een Nederlander een gouden plak: in 1983 en in 1977. In het officieuze landenklassement eindigde Nederland op de 22ste plek, waarmee we alle andere West-Europese landen achter ons lieten.**

■ door Quintijn Puite

# HET LIEGEBEE

## INTERNATIONALE WISKUNDE



Op de eerste wedstrijddag van de Internationale Wiskunde Olympiade, afgelopen zomer in Argentinië, ging een van de opgaven over het *liegebeestspel*. Dat is een spel tussen twee spelers $A$ en $B$, waarbij $A$ een getal $x$ in gedachten heeft tussen vooraf afgesproken grenzen (bijvoorbeeld 1 en 10, of 1 en 100), en waarbij $B$ dat getal moet zien te raden. Speler $B$ mag steeds verzamelingen $S$ vragen aan speler $A$, en $A$ zegt dan of $x$ hierin zit of niet. Maar er zit één addertje onder het gras: speler $A$ geeft niet altijd eerlijk antwoord op de vragen. Hij mag liegen zo vaak hij wil, als hij maar niet meer dan $k$ keer *achter elkaar* liegt, waarbij $k$ een getal is dat $A$ en $B$ van tevoren hebben afgesproken. Na een keer de waarheid te hebben gesproken, mag $A$ weer vrolijk opnieuw (hooguit) $k$ keer liegen.

Op deze manier is het voor speler $B$ natuurlijk lastig om het getal $x$ te raden, met al die onbetrouwbare antwoorden van $A$. Hij mag daarom meerdere waarden voor $x$ geven, maximaal $2^k$ stuks (met $k$ nog steeds het maximale aantal leugens op rij dat $A$ en $B$ hadden afgesproken). Die verzameling mogelijke waarden voor $x$ die $B$ geeft, noemen we het *eindantwoord*. Als $x$ daar in zit, dan wint hij. En anders wint speler $A$.

De opgave is om te bewijzen dat speler $B$ altijd kan winnen. Blijkbaar moet $B$ op een handige manier gebruik maken van het feit dat $A$ niet meer dan $k$ keer achter elkaar mag liegen. Hoe kan hij daarmee genoeg informatie over $x$ vergaren?

**EEN EENVOUDIG VOORBEELD** Bekijk eerst eens een voorbeeldje met $k = 3$, zodat speler $A$ niet meer dan 3 keer achter elkaar mag liegen en speler $B$ als eindantwoord een verzameling met hooguit $2^3 = 8$ getallen mag noemen. Stel dat de vooraf afgesproken grenzen 1 en 10 zijn. In eerste instantie weet $B$ dus niet méér over $x$ dan dat het in de verzameling $\{1, 2, ..., 10\}$ ligt. Dit kun je beschouwen als $B$'s voorlopige eindantwoord. Het is nu de kunst voor $B$ om hier twee getallen uit te gooien waarvan hij zeker weet dat $A$ die nooit gekozen kan hebben als waarde van $x$; dan kan hij als definitief eindantwoord de resterende acht getallen geven en wint hij.

Stel dat speler $B$ vraagt of $x$ in de verzamelingen $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4, 5\}$ of $\{1, 6\}$ zit, waarop $A$ achter-

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

# STSPEL

## OLYMPIADE 2012

| vraag van $B$ | antwoord van $A$ | inconsistente getallen |
|---|---|---|
| {1, 3} | 'ja' | 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 |
| {2, 3, 4} | 'ja' | 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 |
| {4, 5} | 'nee' | 4, 5 |
| {1, 6} | 'ja' | 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 |

Tabel 1

eenvolgens met 'ja', 'ja', 'nee', 'ja' antwoordt. De echte waarde van $x$ kan nu best het getal 3 zijn; in dat geval heeft $A$ namelijk alleen bij de laatste vraag gelogen. Maar $x$ zou net zo goed 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 of 10 kunnen zijn. Het kan echter niet het getal 5 zijn; anders zou $A$ namelijk 4 keer achter elkaar hebben gelogen. En dat is goed nieuws: $B$ kan nu uit zijn voorlopige eindantwoord het getal 5 weggooien en houdt nog maar negen getallen over. Dit is nog steeds één getal te veel, maar misschien kunnen we iets soortgelijks nog eens doen.

**INCONSISTENTE GETALLEN** Waarom lukt het in dit voorbeeld nou om één getal uit te schakelen? Dat komt doordat er een getal $y$ is waarvoor elk van de 4 antwoorden van $A$ een leugen zou zijn als dat de echte waarde van $x$ zou zijn. In tabel 1 staan voor elk van de gegeven antwoorden de getallen waarvoor dat antwoord een leugen zou zijn. We noemen dit voor het gemak de getallen die *inconsistent* zijn met dat antwoord van $A$ op de vraag van $B$. Inderdaad zien we het getal 5 hier op elke rij terug. Dat betekent dus dat als $x$ gelijk zou zijn aan 5, elk antwoord in dit rijtje gelogen zou zijn, maar dat mag niet volgens de regels. Dus weet $B$ nu zeker dat $x$ niet 5 kan zijn. En algemener: van een getal $y$ dat in elke van $k + 1$ opeenvolgende rijen voorkomt als inconsistent getal, weet $B$ dat het niet $x$ kan zijn.

Had dit nou ook gewerkt als $A$ andere antwoorden had gegeven? Stel dat $A$'s laatste antwoord juist 'nee' was geweest (en de eerste drie antwoorden hetzelfde als hierboven), dan had er 1, 6 in de onderste rij van de tabel gestaan. Maar dan kunnen we zo'n $y$ niet vinden, want volgens de derde rij moet $y$ juist 4 of 5 zijn. Speler $B$ kan er in dit geval dus helaas niets mee en moet dus iets nieuws verzinnen...

We zien hierdoor dat – als we ons tot $k + 1$ achtereenvolgende vragen beperken – het eigenlijk alleen maar zin heeft voor $B$ om nog informatie te vragen over getallen die al eerder inconsistent waren. Na zijn derde vraag en het daarop gegeven antwoord was het bijvoorbeeld eigenlijk alleen nog zinvol om iets te vragen over de getallen 4 en 5, bijvoorbeeld door $S$ = {5} te vragen. (Overigens was het getal 4 vanwege het antwoord op de tweede vraag zelfs al niet meer interessant.) Aangezien


Figuur 1 Het Nederlandse team (v.l.n.r. Michelle Sweering, Guus Berkelmans, Jetze Zoethout, Jeroen Huijben, Jeroen Winkel en Matthijs Lip) op het strand in Mar del Plata. Jetze en Jeroen H. wonnen een gouden medaille. Jeroen W., Matthijs en Guus haalden een bronzen medaille en Michelle kreeg een eervolle vermelding. Foto: Birgit van Dalen



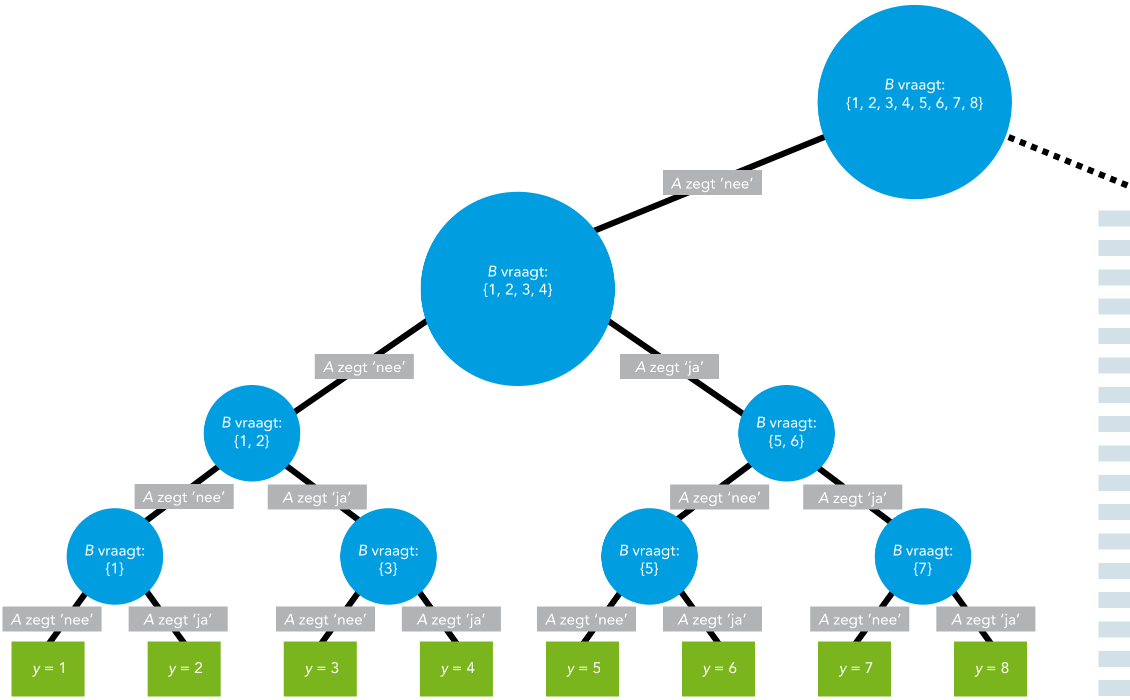
speler $B$ het doel heeft om na zo'n reeks van $k + 1$ vragen één of meerdere getallen $y$ over te houden die inconsistent zijn met alle antwoorden, kan hij dus het beste zijn vraag steeds beperken tot getallen die al inconsistent waren met de eerdere vragen. In tabel 2 zie je een voorbeeld van zo'n spelverloop, waarbij elke nieuwe vraag steeds gaat over inconsistente getallen uit de vorige rij, en ook alleen maar van deze laatste getallen wordt bekeken welke opnieuw inconsistent zijn met het nieuwe antwoord. Doel van $B$ wordt nu om in de laatste rij ten minste één getal $y$ over te houden; dat is dan namelijk automatisch inconsistent met de vorige $k$ antwoorden.

Helaas is er in dit voorbeeld op het eind geen enkel getal $y$ over. Speler $B$ zou zijn vragen zodanig moeten stellen dat – onafhankelijk van de antwoorden van $A$ – er altijd een getal $y$ over blijft. Dat had hij na de eerste vraag (toen er nog acht inconsistente getallen over waren) op zich best voor elkaar kunnen krijgen. Hij had bijvoorbeeld steeds als vraag de onderste helft kunnen nemen van de vorige inconsistente verzameling. We illustreren deze methode aan de hand van een voorbeeld, waarbij $B$ begint met vragen of $x$ in $\{1, 2, ..., 2^k\}$ zit en het eerste antwoord 'nee' is. Dan zou het spelverloop er uit kunnen zien als in tabel 3.

In dit voorbeeld is het getal $y = 6$ blijkbaar inconsistent met elk van de antwoorden, want het is

| vraag van $B$ | antwoord van $A$ | herhaaldelijk inconsistente getallen |
|---|---|---|
| {1, 3} | 'ja' | 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 |
| {2, 4, 7, 8, 9} | 'ja' | 5, 6, 10 |
| {10} | 'nee' | 10 |
| {10} | 'ja' | |

Tabel 2




Figuur 2 Omdat *A* niet 4 keer achter elkaar mag liegen, leidt elk van de 2 × 2 × 2 antwoorden van *A* op de laatste drie vragen tot een getal *y* waaraan *x* zeker niet gelijk kan zijn.



op het eind nog over. Dus kan *B* het getal 6 weggooien uit zijn voorlopige eindantwoord. Was er ook zo'n *y* geweest als *A* andere antwoorden had gegeven? Wat betreft de laatste drie vragen zit dat wel snor. In figuur 2 zien we namelijk dat elk van de 2 × 2 × 2 mogelijke antwoorden van *A* tot precies één getal *y* in {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} in de onderste rij leidt, waarvoor we dus vier leugens op rij hebben als dat *x* was geweest; dat getal *y* kan *B* dus uit zijn voorlopige eindantwoord weglaten.

Maar wat betreft de eerste vraag die *B* stelt, ligt het wat lastiger. Als het antwoord daarop 'ja' was geweest, hadden we als inconsistente getallen slechts 9, 10 gehad, en ging de truc niet op. Als de grenzen in het begin echter zodanig zouden zijn geweest dat er 16 of meer mogelijkheden voor *x* waren (bijvoorbeeld de grenzen 1 en 100), dan hadden we wél weer een getal kunnen afschieten op deze manier: we hadden dan na de eerste vraag als inconsistente getallen in ieder geval 9 tot en met 16 gevonden (alle getallen groter dan 16 vergeten we voor het gemak even) en daar weer dezelfde 'halveringsmethode' op kunnen toepassen en uiteindelijk een *y* uit de verzameling {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} gevonden waarvoor we vier leugens op rij hebben als dat *x* was geweest.

Al met al hebben we hier een mooi deelresultaat bereikt, dat bij de IMO dan ook met 1 punt werd

| vraag van *B* | antwoord van *A* | herhaaldelijk inconsistente getallen |
|---|---|---|
| {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} | 'nee' | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| {1, 2, 3, 4} | 'ja' | 5, 6, 7, 8 |
| {5, 6} | 'nee' | 5, 6 |
| {5} | 'ja' | 6 |

Tabel 3

beloond: speler $B$ kan in ieder geval een eindantwoord geven bestaande uit $2^{k+1} - 1$ getallen. Als er namelijk oorspronkelijk meer getallen waren, dan zijn er dus ten minste $2^{k+1}$ en kunnen we $k + 1$ keer de halveringsstap doen zoals in het voorbeeld hierboven. Bij elke $k + 1$ antwoorden van $A$ kan $B$ precies één getal $y$ met $1 \leq y \leq 2^{k+1}$ vinden dat inconsistent is met alle antwoorden. Dus kan $B$ één getal uit zijn voorlopige eindantwoord weggooien. Als hij nu nog steeds meer dan $2^{k+1}$ getallen over heeft, noemt hij de eerste $2^{k+1}$ daarvan $a_1, a_2, ..., a_{2^{k+1}}$ en past hij hier dezelfde strategie op toe: hij vraagt eerst naar de onderste helft $\{a_1, a_2, ..., a_{2^k}\}$, vervolgens naar de onderste helft van $\{a_1, a_2, ..., a_{2^k}\}$ als het antwoord op de vorige vraag 'nee' was, of naar de onderste helft van $\{a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}}\}$ als het antwoord op de vorige vraag 'ja' was, et cetera.

**VRAGEN NAAR DE BEKENDE WEG** Hoe kan speler $B$ zijn voorlopige eindantwoord toch nog verder reduceren tot een verzameling van $2^k$ getallen? Hierboven waren we op een probleem gestuit als het antwoord op de eerste vraag 'ja' was geweest; dan hadden we maar twee inconsistente getallen gehad (namelijk de getallen 9 en 10) in plaats van acht. Kunnen we speler $A$ niet dwingen om hier 'nee' op te zeggen? Dat blijkt min of meer te kunnen! Speler $B$ vraagt gewoon een aantal keren achter elkaar de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Als er een keer als antwoord 'nee' komt, dan kan $B$ meteen doorgaan met bovenstaande strategie en vragen naar de onderste helft, et cetera, en op het eind kan hij een getal in zijn voorlopige eindantwoord schrappen. Zolang er echter geen antwoord 'nee' komt, komt er als antwoord 'ja'. Maar na meer dan $k$ keer het antwoord 'ja', moet één van deze antwoorden wel waar zijn (en dan zijn ze dus meteen allemaal waar). Dan zit $x$ dus blijkbaar in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, wat betekent dat $B$ gewoon direct deze verzameling als definitief eindantwoord kan geven!

**MOEILIJK!** Het probleem dat we in dit artikel hebben besproken, was opgave 3a van de IMO en is in totaal door zo'n 50 van de 548 deelnemers opgelost, onder anderen door de Nederlanders Guus Berkelmans en Jeroen Winkel. Daarnaast was er nog een onderdeel b (zie www.imo-official.org, waarop ook alle andere opgaven te vinden zijn). Met maar acht volledige oplossingen bleek deze opgave naderhand de allermoeilijkste opgave van de IMO 2012 te zijn. ■

## ONTMOET HET NEDERLANDSE IMO-TEAM!

Op zaterdag 6 oktober 2012 staat het Leidse Museum Boerhaave in het teken van wiskunde. Onder de titel *Goochelen met getallen* is er op die dag een vrolijk wiskundeprogramma, dat voor iedereen begrijpelijk is, ook voor wie nog nooit van de stelling van Pythagoras of van π heeft gehoord. De leden van het Nederlandse IMO-team van afgelopen zomer zullen hier als *special guests* optreden. Zij blikken terug op de wedstrijd, die twee gouden medailles en drie bronzen plakken opleverde. Ionica Smeets vertelt om 11:00 uur over alledaagse verschijnselen en legt uit hoe de wiskunde helpt deze te verklaren. En om 15:00 uur sluit Steven Wepster (Universiteit Utrecht) de dag af met een lezing over Simon Stevin (1548-1620), toegepast wiskundige, natuurkundige en ingenieur (zeilwagen), wiens werk is terug te vinden in Museum Boerhaave.

Ook op zondag 7 oktober gebeurt er van alles in Museum Boerhaave. Om 15:00 uur geeft André Kuipers een lezing over zijn ervaringen tijdens de missie naar ruimtestation ISS. Kuipers vertelt aan de hand van prachtige beelden over de raketvlucht en het leven en werk aan boord. Met 193 dagen heeft hij de langste ruimtemissie op zijn naam staan van alle Europese ruimtevaarders.

Op 6 en 7 oktober is Museum Boerhaave gratis toegankelijk. Adres: Lange St. Agnietenstraat 10, Leiden. Voor de lezing van André Kuipers is reserveren verplicht. Meer informatie kun je vinden op www.museumboerhaave.nl.