Van 5 tot 14 juli werd in de Kazachstaanse hoofdstad Astana de 51ste Internationale Wiskunde Olympiade gehouden, dé wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Daar zetten 517 leerlingen uit 96 landen hun tanden in zes moeilijke wiskundeopgaven. Nederland was vertegenwoordigd door een sterk team: Guus Berkelmans, Harm Campmans, Madelon de Kemp, David Kok, Daniël Kroes en Merlijn Staps.

■ door Johan Konter en Sietske Tacoma

DE GELDMACHINE

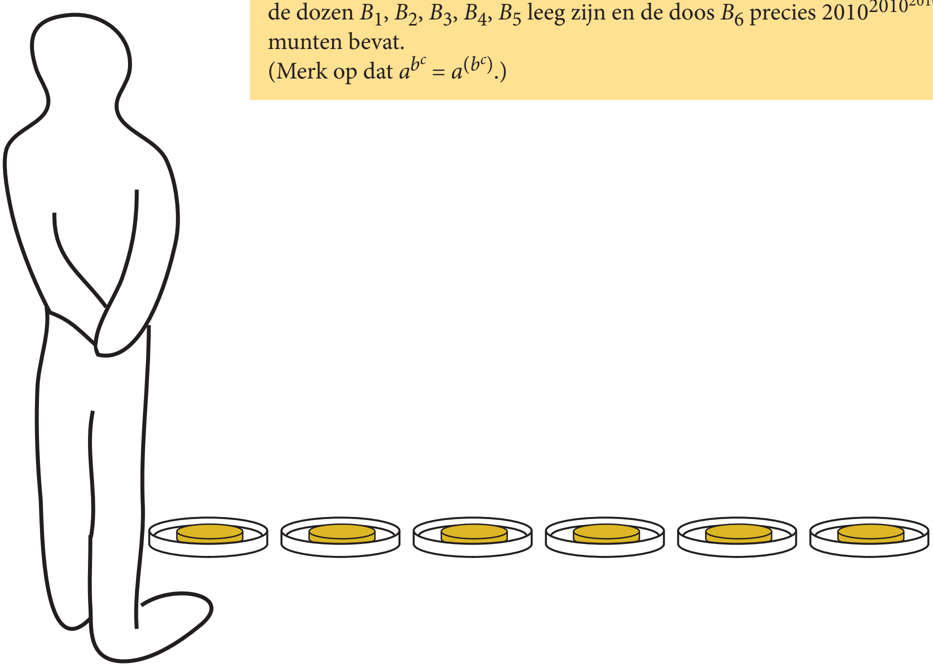
OPGAVE 5 (IMO 2010)

In elk van de zes dozen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 zit oorspronkelijk één munt. Er zijn twee types handelingen toegestaan:

Type 1: Kies een niet-lege doos B_j met $1 \le j \le 5$.
Verwijder één munt uit B_j en voeg twee munten toe aan B_{j+1}.

Type 2: Kies een niet-lege doos B_k met $1 \le k \le 4$.
Verwijder één munt uit B_k en verwissel de inhoud van de (mogelijk lege) dozen B_{k+1} en B_{k+2}.

Bepaal of er een eindige rij van zulke handelingen bestaat, zo dat daarna de dozen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leeg zijn en de doos B_6 precies $2010^{2010^{2010}}$ munten bevat.
(Merk op dat $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)



AvdB

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De opgaven voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) worden zorgvuldig geselecteerd. Dat ook één van de zes opgaven van Nederlandse origine was, is dan ook een hele eer. Deze opgave gaat over een geldmachine en is bedacht door Hans Zantema van de Technische Universiteit Eindhoven en de Radboud Universiteit Nijmegen. Zie het kader op pagina 26.

Hoe los je zo'n opgave op? Waar moet je beginnen? Het is verstandig eerst wat voorbeeldjes te proberen. Zo zou je de volgende serie handelingen kunnen doen. We zullen $\triangleright$ gebruiken voor een handeling van type 1 en $\blacktriangleright$ voor een handeling van type 2. We beginnen natuurlijk met zes enen.

$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \triangleright (1, 1, 1, 1, 0, 3) \triangleright$
$(1, 1, 1, 0, 2, 3) \triangleright (1, 1, 1, 0, 1, 5) \triangleright$
$(1, 1, 1, 0, 0, 7)$.

Nu kunnen we met de eerste drie enen precies hetzelfde doen als we met de laatste drie enen hebben gedaan, dan komen we uit op $(0, 0, 7, 0, 0, 7)$. Daarmee kunnen we als volgt verder gaan:

$(0, 0, 7, 0, 0, 7) \triangleright (0, 0, 6, 2, 0, 7) \blacktriangleright$
$(0, 0, 6, 1, 7, 0) \triangleright \ldots \triangleright (0, 0, 6, 1, 0, 14) \blacktriangleright$
$(0, 0, 6, 0, 14, 0) \blacktriangleright (0, 0, 5, 14, 0, 0) \triangleright \ldots \triangleright$
$(0, 0, 5, 0, 28, 0) \blacktriangleright (0, 0, 4, 28, 0, 0)$.

Hier pauzeren we even, want we kunnen al een paar opmerkingen maken. Ten eerste kan het muntje in doos B_1 hoogstens één keer gebruikt worden en daarna blijft doos B_1 altijd leeg. Er is namelijk geen handeling die ervoor zorgt dat er munten in doos B_1 kunnen komen. Verder hebben we zojuist vanaf $(0, 0, 5, 14, 0, 0)$ de inhoud van doos B_4 verdubbeld door de volgende handelingen: eerst hebben we 14 keer een handeling van type 1 gedaan, waardoor we 14 munten uit doos B_4 hebben gehaald en daarvoor 28 munten in doos B_5 hebben teruggekregen. Daarna hebben we één muntje uit doos B_3 betaald om doos B_4 en B_5 om te wisselen. Het verdubbelen van de inhoud van doos B_4 heeft ons dus maar één muntje gekost, uit doos B_3.

Deze serie van handelingen kunnen we nog eens doen:

$(0, 0, 4, 28, 0, 0) \triangleright \ldots \triangleright (0, 0, 4, 0, 56, 0) \blacktriangleright$
$(0, 0, 3, 56, 0, 0)$.

Nadat we dit nog drie keer hebben gedaan, komen we uit op $(0, 0, 0, 448, 0, 0)$, waar we $(0, 0, 0, 447, 2, 0)$ van kunnen maken. Net als hiervoor kunnen we nu de inhoud van doos B_5 net zo lang verdubbelen tot doos B_4 leeg is. Zo komen we bij $(0, 0, 0, 0, 2^{448}, 0)$, waar we met behulp van handelingen van type 1 ten slotte $(0, 0, 0, 0, 0, 2^{449})$ van maken. In deze laatste stappen hebben we de eerste drie dozen helemaal niet gebruikt.

We kunnen dus altijd de inhoud van drie opeenvolgende dozen veranderen van $(a, 0, 0)$ naar $(0, 2^a, 0)$, ongeacht hoeveel munten er in de andere dozen nog zitten; we zullen dit noteren als $(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$. Deze stap doen we door eerst één munt uit de eerste van de drie dozen te halen en daarvoor twee munten terug te stoppen in de tweede doos, dus $(a, 0, 0) \triangleright (a - 1, 2, 0)$, en door vervolgens $a - 1$ keer de 'verdubbelingstap' $(x, y, 0) \triangleright \ldots \triangleright (x, 0, 2y) \blacktriangleright (x - 1, 2y, 0)$ te doen. Dit betekent dat we al een behoorlijk groot aantal munten kunnen maken. Merk op dat we voor deze stap de derde doos, die aan het begin en aan het eind van de stap leeg is, wel echt hebben gebruikt in de handelingen die we hebben gedaan. Daarom kunnen we dezelfde truc niet nog een keer van doos B_5 naar doos B_6 doen.

ZOEKEN NAAR DE OPLOSSING Nu kunnen we gaan nadenken over een oplossing. Als er zo'n rij handelingen bestaat, dus als het antwoord 'ja' is, dan willen we een manier vinden om de eerste vijf dozen leeg te maken en in de zesde doos precies $2010^{2010^{2010}}$ munten te krijgen. Als er echter geen rij handelingen bestaat die voldoet, en het antwoord 'nee' is, dan willen we een reden vinden waarom het niet kan. Hiervoor zijn twee technieken gebruikelijk.

Ten eerste kun je zoeken naar een *invariant*, een eigenschap van het aantal munten in één of meer dozen die bij alle toegelaten handelingen onveranderd blijft. Vervolgens kijk je wat de waarde van die invariant is in de begintoestand en in de vereiste eindtoestand. Zijn die waarden niet hetzelfde, dan heb je bewezen dat je nooit van de begin- naar de eindtoestand kunt komen. Ten tweede kun je een *bovengrens* proberen te bepalen voor het aantal munten in een doos, en dan maar hopen dat die bovengrens kleiner is dan $2010^{2010^{2010}}$.

Aangezien we in het voorbeeld nog lang niet in de buurt kwamen van $2010^{2010^{2010}}$ munten in doos B_6, kunnen we eerst eens kijken of we een bovengrens kunnen vinden. Als we alleen handelingen mogen doen van type 1, dan is het vinden van een bovengrens niet moeilijk. Elk muntje zorgt voor twee muntjes in de volgende doos. Het muntje dat oorspronkelijk in doos B_5 ligt, zorgt dus voor twee muntjes in doos B_6. Het muntje dat oorspronkelijk in doos B_4 ligt, zorgt voor twee muntjes in doos B_5, dus voor vier muntjes in doos B_6. Zo vinden we ook dat het eerste muntje uit doos B_3 zorgt voor $2 \times 2 \times 2 = 8$ muntjes in doos B_6. Ten slotte zorgt het muntje uit doos B_2 voor 16 en het muntje uit doos B_1 voor 32 muntjes in doos B_6. In totaal zitten er aan het eind dus $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ muntjes in doos B_6.

Handelingen van type 2 maken het zoeken naar een bovengrens ingewikkelder. Sterker nog, we hebben gezien dat we met behulp van handelingen van type 2 al vrij grote tweemachten kunnen krijgen. We hebben net natuurlijk zomaar wat geprobeerd, misschien kunnen we toch wel nog veel grotere aantallen munten produceren. En dat helpt ons waarschijnlijk altijd verder, of we nou willen zoeken naar een bovengrens, of naar een manier om $2010^{2010^{2010}}$ munten in doos B_6 te krijgen. Óf het lukt om zoveel munten te verkrijgen en dan zijn we meteen klaar, óf het lukt niet en dan kunnen we met de nieuwe inzichten gerichter gaan nadenken over waar het vast loopt.

TORENS BOUWEN Nu we iets nieuws gaan proberen, namelijk zo veel mogelijk munten krijgen, kijken we eerst weer even terug naar ons voorbeeld. We hebben gezien dat we drie opeenvolgende dozen met inhoud a, 0 en 0 kunnen kiezen en daar met de verdubbelingstap de inhouden 0, 2^a en 0 van kunnen maken. Hierdoor konden we al behoorlijk grote getallen maken, maar 2^{449} is nog steeds wel een stuk kleiner dan $2010^{2010^{2010}}$. We moeten dus nog wat slims doen.

Om dat te doen bekijken we niet drie, maar vier opeenvolgende dozen. Met behulp van de zojuist gevonden serie handelingen $(a, 0, 0) \rightarrow (0, 2^a, 0)$ vinden we namelijk dat $(b, a, 0, 0) \rightarrow (b, 0, 2^a, 0) \blacktriangleright (b-1, 2^a, 0, 0)$. Als we deze laatste combinatie van handelingen nu aanduiden met $\Rightarrow$ en beginnen met $(b, 0, 0, 0)$, dan kunnen we daar het volgende van maken:

$$(b, 0, 0, 0) \triangleright (b-1, 2, 0, 0) \Rightarrow$$
$$(b-2, 2^2, 0, 0) \Rightarrow (b-3, 2^{2^2}, 0, 0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$
$$(0, T_b, 0, 0).$$

Hierin gebruiken we de notatie T_n voor een 'toren' van n tweeën:

$$T_n = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n \text{ keer}},$$

en we zullen deze combinatie noteren als $(b, 0, 0, 0) \,➔\, (0, T_b, 0, 0)$.

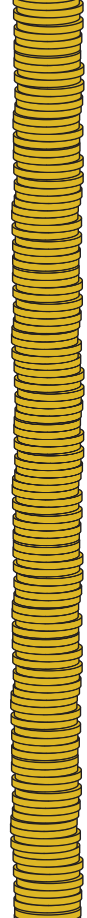
We weten dat $2010 < 2048 = 2^{11}$, waarmee we kunnen afschatten dat

$$2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} =$$
$$= 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} <$$
$$< 2^{2^{11 \cdot 2011}} < 2^{2^{11 \cdot 2^{11}}} < 2^{2^{2^4 \cdot 2^{11}}} =$$
$$= 2^{2^{2^{15}}} < T_6.$$

Nu maken we de volgende rij handelingen:

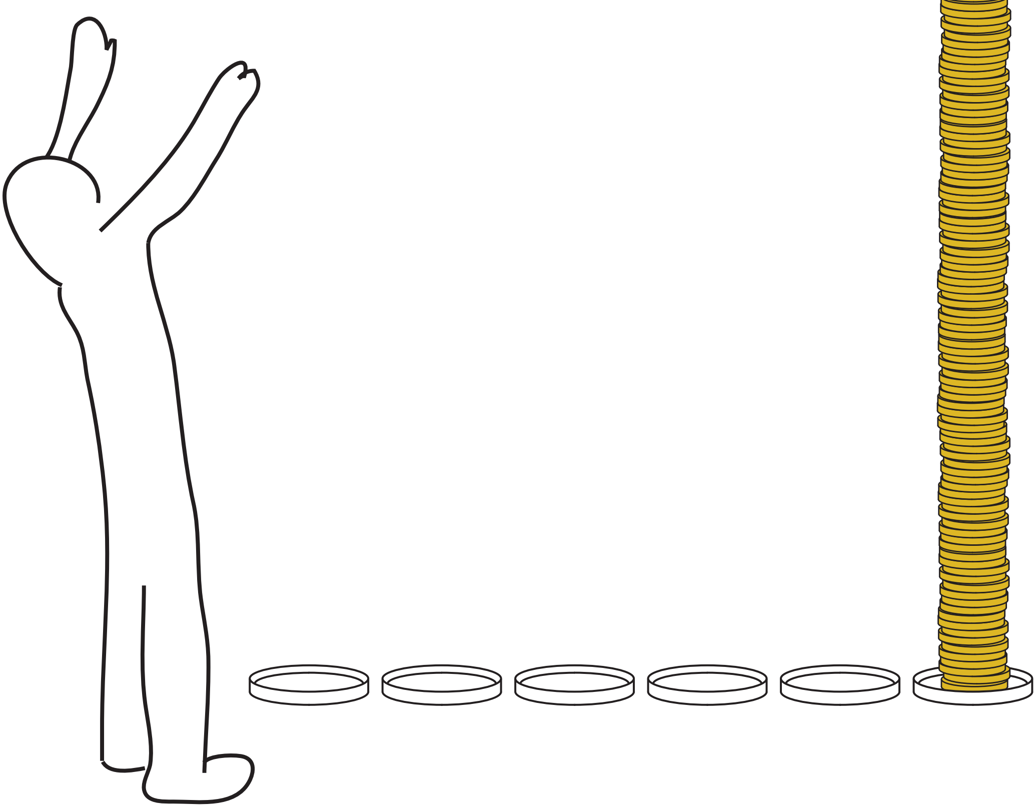
$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \triangleright (1, 1, 1, 1, 0, 3) \blacktriangleright$$
$$(1, 1, 1, 0, 3, 0) \blacktriangleright \ldots \blacktriangleright (0, 3, 0, 0, 0, 0) \,➔$$
$$(0, 0, T_3, 0, 0, 0) = (0, 0, 16, 0, 0, 0) \,➔$$
$$(0, 0, 0, T_{16}, 0, 0).$$

Nu we zo ontzettend veel munten in doos B_4 hebben gekregen, is het niet moeilijk meer om het goede aantal munten in doos B_6 te krijgen. Eerst blijven we de laatste twee (lege) dozen omwisselen om munten uit B_4 te halen, totdat er in B_4 nog een kwart van $2010^{2010^{2010}}$ munten zitten. Met handelingen van type 1 kunnen we nu twee keer zo veel munten in doos B_5 krijgen en vervolgens vier keer zo veel munten in B_6, precies wat we willen.



MOEILIJK! Nu hebben we gezien dat we wel degelijk zoveel munten in doos B_6 kunnen krijgen, dus dat het antwoord 'ja' is. Dit is tijdens de afgelopen IMO door maar 37 deelnemers helemaal correct bewezen. Het is dus geen makkelijke opgave. Veel mensen stonden op het verkeerde been en probeerden te bewijzen dat het níét kon. Zo ook het Nederlandse team. Gelukkig hebben ze dat meer dan goed gemaakt door op opgave 1 en 4 allemaal alle punten te pakken. Met maar liefst vijf bronzen medailles en een eervolle vermelding ging het Nederlandse team naar huis.

De geldmachine kan nog veel meer munten produceren en het is dan ook niet gek als je je nu afvraagt: 'Als dit mijn geldmachine was, hoeveel munten zou ik dan kunnen krijgen?' Met zulke belangrijke vragen willen we je natuurlijk niet laten zitten, daarom geven we een gedeeltelijk antwoord. Je kan in ieder geval $T_{T_{2^{14}}}$ munten krijgen. Dit is een enorm getal: stel je een toren van A tweeën voor, waarbij het getal A al een toren is van 2^{14} tweeën. Hoe je dit voor elkaar krijgt en of je nog hogere bedragen kunt produceren, blijft huiswerk. ■



AvdB