Op weg naar IMO2011

IMO2007 - OPGAVE 4

[Wouter Zomervrucht]

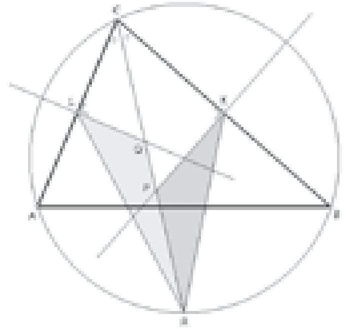
Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

Ter voorbereiding op de IMO is er elk jaar een training. Tweemaal heb ik aan deze training meegedaan. In 2006 werd ik zevende in de eindselectie en kon daarom helaas niet mee naar Slovenië, waar de IMO toen werd gehouden. Het jaar daarna had ik profijt van de opgedane trainingservaring en kwam ik in de Nederlandse delegatie voor de IMO in Vietnam terecht. Een ver land, een spannende wedstrijd… een unieke ervaring! Na nog een week training ter plaatse begon de wedstrijd. Op de tweede dag kregen alle 520 deelnemers het volgende probleem voorgeschoteld.

De opgave

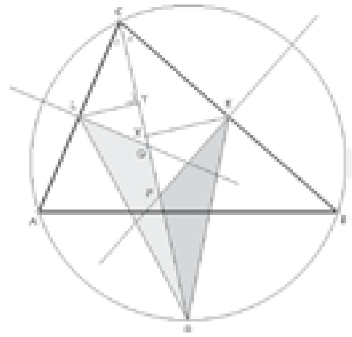
Gegeven is een driehoek ABC. De bissectrice van hoek BCA snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in het punt R ($R \neq C$), de middelloodlijn van de zijde BC in het punt P en de middelloodlijn van de zijde AC in het punt Q. Het midden van BC is K en het midden van AC is L. Bewijs dat de driehoeken RPK en RQL dezelfde oppervlakte hebben.

Om te beginnen maken we een plaatje van de situatie (***zie figuur 1***). Zo krijgen we een idee van de opgave en van wat er bewezen moet worden. Allereerst tekenen we de driehoek ABC en zijn omgeschreven cirkel (in de praktijk teken je natuurlijk *eerst* de cirkel: het is veel makkelijker om een driehoek in een cirkel te tekenen dan een cirkel om een driehoek). De bissectrice van hoek BCA snijdt eerst de zijde AB en daarna de cirkel, in het punt R. Merk op dat R dan halverwege boog AB ligt; dat is ook handig om te weten bij het tekenen van het plaatje. Van de zijden BC en AC tekenen we de middelloodlijnen. Deze gaan door het midden van die zijden – dus door K en L.



figuur 1

In figuur 1 zijn de driehoeken RPK en RQL aangegeven. We moeten bewijzen dat deze dezelfde oppervlakte hebben. Het ligt dus voor de hand om te proberen uitdrukkingen te vinden voor de oppervlaktes van beide driehoeken, en vervolgens te bewijzen dat die gelijk zijn.
Bij de olympiadetraining leer je veel formules voor de oppervlakte van een driehoek, maar vaak is de bekendste toch het handigst: de helft van de basis maal de hoogte. We gaan proberen die formule te gebruiken.
Nu hebben we echter een probleem. Van beide driehoeken hebben we geen hoogtelijn, welke zijde we ook als basis kiezen. We moeten dus een hoogtelijn tekenen. Wat wordt de basis? We laten ons leiden door de informatie die we hebben. De driehoeken CKP en CLQ zijn twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken, want er geldt $\angle PCK = \angle QCL$ en $\angle CKP = 90° = \angle CLQ$. Het is een bekend feit dat als we in een rechthoekige driehoek de loodlijn nemen uit de rechte hoek, er veel gelijkvormige driehoeken ontstaan. Bovendien zien we in dit geval dat de *loodlijn* uit K op CP precies een *hoogtelijn* van driehoek RPK is. Dit lijkt dus een goede keus! We noemen het voetpunt van die hoogtelijn X, en Y wordt het voetpunt van de hoogtelijn uit L op CQ. Nu zijn we in de situatie als is weergegeven ***in figuur 2***.



figuur 2

De driehoeken CKP, KXP, CXK, CLQ, LYQ en CYL zijn allemaal gelijkvormig! Al die gelijkvormigheden suggereren dat we moeten kijken naar de *verhouding* van oppervlaktes. Laten we eerst de verhouding tussen de hoogtelijnen KX en LY bekijken. We weten bijvoorbeeld:

$$\textbf{(1)}\ldots\ \frac{KX}{LY} = \frac{KP}{LQ} = \frac{CP}{CQ} = \frac{CK}{CL}$$

Dit zijn slechts een paar van de vele gelijke verhoudingen – ga maar na. We keren terug naar ons doel: bewijzen dat de driehoeken RPK en RQL gelijke oppervlakte hebben. Dus moet gelden:

$\frac{1}{2} \cdot RP \cdot KX = \frac{1}{2} \cdot RQ \cdot LY$

In verhoudingen staat hier niets anders dan:

$$\textbf{(2)}\ldots\ \frac{KX}{LY} = \frac{RQ}{RP}$$

Maar nu zien we iets vreemds, als we schrijven $RP = CR - CP$ en $RQ = CR - CQ$. (Waarom liggen P en Q trouwens altijd tussen C en R? *Hint*: bewijs dat C en R niet aan dezelfde kant van de middelloodlijn van zijde BC respectievelijk AC kunnen liggen.) Volgens (1) geldt:

$$\frac{KX}{LY} = \frac{CP}{CQ}$$

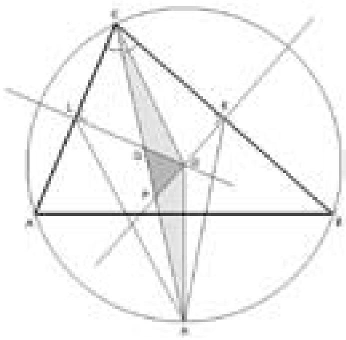
en aan de andere kant hebben we:

$$\frac{RQ}{RP} = \frac{CR - CQ}{CR - CP}$$

Vergelijking (2) is daarom equivalent met:

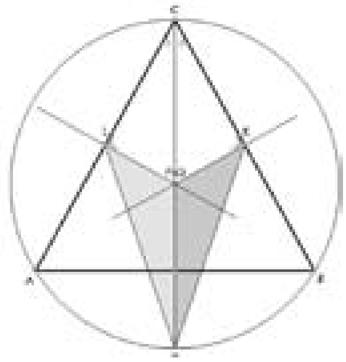
$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CR - CQ}{CR - CP}$$

Dus na uitvermenigvuldigen moeten we bewijzen dat geldt:
(3)… $CP \cdot (CR - CP) = CQ \cdot (CR - CQ)$
Dit is een heel opmerkelijke vergelijking. Om hieraan te voldoen moeten P en Q wel bijzondere punten zijn: de enige mogelijkheden zijn: $CQ = CP$ óf $CQ = CR - CP$. Dat zie je door (3) als een kwadratische vergelijking in CQ op te vatten. De variant $CQ = CP$ lijkt in ons plaatje (***zie figuur 2***) niet te kloppen. Dus zullen we proberen te bewijzen dat geldt: $CQ = CR - CP$
Dat komt erop neer dat CQ en RP even lang zijn, oftewel dat het lijnstuk PQ precies in het midden van het lijnstuk CR ligt.
Op het eerste gezicht lijkt dat niet zo makkelijk te bewijzen. We hebben een creatief idee nodig. Een mogelijkheid is om op te merken dat de twee middelloodlijnen in feite middellijnen van de omgeschreven cirkel zijn en elkaar snijden in O, het middelpunt van die cirkel. Aangezien C en R op de cirkel liggen, geldt $OC = OR$; zie voor de duidelijkheid ***figuur 3***.



figuur 3

Driehoek COR is dus gelijkbenig, en O ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk CR. De gelijkheid $CQ = RP$ komt neer op bewijzen dat P en Q even ver van het midden van CR liggen, dus even ver van O. Dat punt is immers een punt op de middelloodlijn van CR. Ons doel wordt dus te bewijzen dat $OP = OQ$.
Dit is hetzelfde als zeggen dat driehoek POQ gelijkbenig is. Daar kunnen we iets mee! Met het plaatje erbij is dat helemaal niet moeilijk.
Laten we $\angle ACR = \angle RCB = d$ noteren. We zien in driehoek CKP meteen dat geldt:
$\angle OPQ = \angle KPC = 90° - d$
Net zo is, wegens overstaande hoeken:
$\angle OQP = \angle LQC = 90° - d$
Driehoek POQ is inderdaad gelijkbenig! Er volgt dat P en Q even ver van het midden van CR liggen, zodat CQ en RP even lang zijn. (Je kan ook eenvoudig bewijzen dat



figuur 4

de driehoeken CQO en RPO congruent zijn.) De stelling is bewezen!
Bewezen? Nou ja, bijna. We hebben een paar verborgen aannamen gemaakt. Wat gebeurt er als O op het lijnstuk CR ligt? Of als P en Q samenvallen? En wat verandert er als C, Q, P en R niet in die volgorde liggen, maar in de volgorde C, P, Q, R? Probeer te bewijzen dat deze gevallen precies afhangen van of $AC < BC$ is, dan wel $AC = BC$ of $AC > BC$. In dat laatste geval kunnen we een bewijs geven dat heel erg lijkt op het bovenstaande (waarbij we impliciet $AC < BC$ hebben aangenomen), maar met A en B verwisseld. In het geval $AC = BC$ is de situatie zo eenvoudig dat er een heel simpel bewijs is (zie ook ***figuur 4***[1]).

Dit is een echte olympiadeopgave: de oplossing vereist weinig voorkennis, maar het vinden van de oplossing is de uitdaging. Enige creativiteit is nodig om het punt O te gebruiken. Die creativiteit had ik destijds niet, zodat mijn bewijs een stuk ingewikkelder was. Toch had ik deze opgave goed opgelost. Op de eerste wedstrijddag had ik ook opgave 1 opgelost, en met nog 2 losse punten erbij was dat genoeg voor een bronzen medaille. Maar wat het meest is blijven hangen, is het spektakel – het land, de wedstrijd, de grootse openings- en slotceremonie.
De olympiade is een belangrijke reden dat ik wiskunde ben gaan studeren en er nog steeds mee bezig ben.

Noot
[1] Figuur 4 is door de redactie aan het artikel toegevoegd.

Over de auteur
Wouter Zomervrucht heeft in 2007 deelgenomen aan de IMO in Vietnam en in 2006 aan de Internationale Taalkunde Olympiade in Estland. Hij studeert wiskunde (richting algebra, meetkunde en getaltheorie) en informatica aan de Universiteit Leiden en werkt daar ook als student-assistent.
E-mailadres: *w.zomervrucht@gmail.com*