Op weg naar IMO2011

IMO2010 - OPGAVE 1

[Daniël Kroes]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken trof u in Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In januari 2009 deed ik op initiatief van mijn wiskundeleraar voor het eerst mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Dit ging onder het mom van 'ik zie wel hoe ver ik kom', en anderhalf jaar later bleek dat 'hoe ver' Kazachstan te zijn, waar ik mee mocht doen aan de IMO. Mijn doel daar was een eervolle vermelding, die je krijgt als je één opgave volledig oplost. Uiteindelijk loste ik twee opgaven volledig op en had zo 14 punten. Dit was dik voldoende voor een eervolle vermelding en bleek later net 1 punt te weinig voor brons. De vijf andere teamleden, met scores variërend van 15 tot 17 punten, hadden allemaal brons.
Ik zal in dit artikel iets vertellen over de oplossing en mijn weg naar de oplossing bij opgave 1.

De opgave
Bepaal alle functies f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat de gelijkheid
$f([x]y) = f(x)[f(y)]$
geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(Hier staat $[z]$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z.[1])

Het getal $[z]$ heet trouwens de *entier* van z en zo zal ik deze in de rest van het artikel ook noemen.
Wat betekent deze opgave nou eigenlijk?
Een functie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een functie $f(x)$ zodat voor elk reëel getal a er een reëel getal b bestaat zodat $f(a) = b$.
De functie kan een functie zijn zoals alle middelbare scholieren die kennen, bijvoorbeeld $f(x) = x$ of $f(x) = 3x^3 + 1/x$, maar ook functies zoals:

- $f(x) = x^2$ voor alle getallen groter dan of gelijk aan 0 en $f(x) = -x$ voor alle getallen kleiner dan 0;
- $f(x) = 3x + 2$ voor alle gehele getallen en $f(x) = 2$ voor alle overige getallen.

In deze opgave is het de bedoeling om alle functies te vinden die voldoen aan de gegeven functievergelijking. Het gaat hier dus niet om een vergelijking waaruit je x of y moet oplossen. Voor x en y mag je juist elk paar reële getallen invullen en dan moet de vergelijking nog steeds waar zijn.
Laten we voor deze opgave eens kijken of er makkelijke functies zijn die voldoen aan deze functievergelijking.
Stel dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan is $f([x]y)$ gelijk aan 0, net als $f(x)[f(y)]$; dus deze functie voldoet voor alle x en y aan de vergelijking. We hebben nu al een eerste functie gevonden!
Stel nu dat $f(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan zou moeten gelden dat $[x]y$ gelijk is aan $x[y]$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Invullen van $x = y = 1$ geeft $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ en dat klopt. Maar invullen van $x = 2$, $y = ½$ geeft $2 \cdot ½ = 2 \cdot 0$, oftewel $1 = 0$ en dat klopt natuurlijk niet.
Nu voldoet $f(x) = x$ dus niet, want ook al bestaan er waarden van x en y waarvoor het geldt, we hebben ook waarden voor x en y gevonden waarvoor het niet geldt. Dit is in tegenspraak met het feit dat de gezochte functie voor *alle* waarden van x en y moet voldoen.
Een andere mogelijke functie is $f(x) = [x]$. Nu zou moeten gelden dat: $[[x]y] = [x] \cdot [[y]]$. Maar als we hier $x = 2$, $y = 2½$ invullen, staat er $5 = 4$ en dat klopt ook niet.
We zouden nu nog heel veel functies kunnen proberen, maar aangezien er oneindig veel mogelijke functies zijn, kun je ze niet allemaal één voor één controleren.
Dus moeten we een andere manier bedenken om informatie te krijgen over de functies die voldoen. Maar hoe pakken we dit nou aan?
Uiteindelijk is het doel om voor alle x de waarde van $f(x)$ te vinden (want dan hebben we precies de functie gevonden) maar er zijn oneindig veel mogelijke x-en, dus het is niet meteen duidelijk hóe we die moeten vinden.
We kunnen beginnen door te proberen om de waarde van $f(x)$ te vinden voor een paar verschillende getallen x. Bij functievergelijkingen is het vaak handig de waarde van $f(0)$ te vinden.

Als we in onze functievergelijking $x = y = 0$ invullen, vinden we dat de functie(s) die we zoeken, in ieder geval moeten voldoen aan:
$f(0) = f(0) \cdot [f(0)]$
Dit kunnen we omschrijven tot:
$f(0) \cdot ([f(0)] - 1) = 0$
Dus:
$f(0) = 0$ óf $[f(0)] - 1 = 0$
Nu nemen we eerst aan dat: $[f(0)] - 1 = 0$, oftewel: $[f(0)] = 1$.
Invullen van $y = 0$ geeft nu:
$f(0) = f(x) \cdot [f(0)] = f(x)$
voor alle reële getallen x. Dit betekent dat $f(x)$ een constante functie is, dus $f(x) = c$, met c gelijk aan $f(0)$. Aangezien in dit geval de entier van $f(0)$ gelijk is aan 1, moet gelden dat de entier van c gelijk is aan 1, dus $c \in [1; 2)$. Dit is dus de eerste mogelijke functie. Eigenlijk zijn dit zelfs oneindig veel functies, die we in één keer gevonden hebben.

Zijn dit meteen alle mogelijke functies? Nee. Hierboven hebben we aangenomen dat $[f(0)] - 1 = 0$, maar dit hoeft niet per se zo te zijn. We hadden namelijk ook al gezien dat het zo zou kunnen zijn, dat $f(0) = 0$. Dit geval zullen we dus ook nog moeten behandelen. Dus vanaf nu nemen we aan dat $f(0) = 0$. Als we net als hierboven $y = 0$ invullen, staat hier dat moet gelden dat:
$f(0) = f(x) \cdot [f(0)]$
voor alle reële x. Maar beide kanten zijn gelijk aan 0, dus dit klopt voor alle reële waarden van x. Invullen van $y = 0$ geeft ons nu geen extra informatie over waar de

functie f aan moet voldoen. We zullen dus iets anders moeten verzinnen.

Misschien bestaan er wel getallen x en y zodat $[x]y = x = y$. Als dit zo is kunnen we namelijk die waarden van x en y invullen en dan krijgen we een vergelijking in één variabele (namelijk $f(x)$) en die kunnen we oplossen. Als $x = y = 0$ klopt dit, maar dit hebben we al ingevuld. We proberen even verder en dan merken we dat $x = y = 1$ ook voldoet. Dus laten we dat eens invullen. Nu staat er:
$f(1) = f(1) \cdot [f(1)]$
oftewel:
$f(1) \cdot ([f(1)] - 1) = 0$
Dus nu geldt weer:
$f(1) = 0$ óf $[f(1)] - 1 = 0$
Laten we eerst aannemen dat $f(1) = 0$.
Invullen van $x = 1$ geeft nu dat:
$f([1]y) = f(1) \cdot [f(y)] = 0 \cdot [f(y)] = 0$
voor alle reële getallen y. Dit betekent dat we een nieuwe mogelijke functie hebben, namelijk $f(y) = 0$ voor alle reële getallen y.

Nu hebben we echter nog niet alle mogelijkheden gehad: het kan nog zo zijn dat $f(0) = 0$ én $[f(1)] - 1 = 0$, oftewel $[f(1)] = 1$. Als we nu $y = 1$ invullen vinden we dat:
$f([x]) = f(x) \cdot [f(1)] = f(x)$
Wat houdt dit precies in? Het houdt bijvoorbeeld in dat:
- $f(3) = f(\pi)$
- $f(0) = f(½)$
- $f(6) = f(6)$
- $f(1098) = f(1098{,}0000001)$

Van deze identiteiten gaan we er eentje gebruiken en dat is $f(0) = f(½)$. Aangezien $f(0) = 0$ is, geldt: $f(½) = 0$.
Als we nu $x = 2$ en $y = ½$ nemen, vinden we dat:
$f([2] \cdot ½) = f(2) \cdot [f(½)] = f(2) \cdot [0] = 0$
Aangezien $[2] \cdot ½ = 1$, zou nu moeten gelden dat $f(1) = 0$. Maar we hadden eerder aangenomen dat $[f(1)] = 1$, wat betekent dat $f(1) \in [1; 2)$. Dus dat is in tegenspraak met elkaar.
Blijkbaar kan een functie niet tegelijkertijd voldoen aan $f([x]y) = f(x)[f(y)]$ voor alle x en y, $f(0) = 0$ en $[f(1)] = 1$. Dit laatste geval leidt dus tot geen enkele mogelijke functie.

Nu hebben we alle gevallen gehad en hebben we de volgende mogelijke functies:
- $f(x) = 0$ voor alle reële x, of:
- $f(x) = c$ voor alle reële x met $c \in [1; 2)$.

Ik heb het bewust over *mogelijke* functies, want hoewel deze functies voldoen voor de waarden van x en y die we hebben ingevuld om tot deze functies komen, kan het zijn dat er waarden $x, y \in \mathbb{R}$ bestaan waarvoor de vergelijking toch niet klopt.
Daarom moeten we bij dit soort opgaven altijd alle mogelijke functies controleren. En, als we dit niet doen, kost dat zelfs punten.

Eerst gaan we de functie $f(x) = 0$ controleren.
Nu geldt dat:
$f([x]y) = 0$ en $f(x) \cdot [f(y)] = 0 \cdot [0] = 0$
voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Dus deze functie voldoet ook werkelijk aan de functievergelijking voor alle mogelijke waarden van x en y.
Nu gaan we ook de functie $f(x) = c$ met $c \in [1; 2)$ controleren. Er geldt dat:
$f([x]y) = c$ en $f(x) \cdot [f(y)] = c \cdot [c] = c$
voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. De gelijkheid $c \cdot [c] = c$ geldt omdat $[c] = 1$, want het grootste getal kleiner dan of gelijk aan c is 1.
Nu weten we dus dat $f(x) = c$ met $c \in [1; 2)$ ook voldoet aan de functievergelijking voor alle mogelijke waarden van x en y.

Wat hebben we bij deze opgave eigenlijk precies gedaan?
We hebben niet meer gedaan dan het aantal mogelijke functies teruggebracht tot een ‘beperkt’ aantal, zodat we alle overgebleven mogelijke functies konden controleren.
Het aantal functies dat voldoet, is nog steeds oneindig, want er zijn oneindig veel getallen tussen 1 en 2, maar we konden al die functies op een grote hoop gooien en in één keer controleren.
De oplossing hierboven is precies de oplossing die ik op de IMO heb gebruikt, en tot nu toe weet ik nog geen enkele andere oplossing die wezenlijk anders is.
Vooraf hoopte ik op een leuke, niet te moeilijke opgave 1 en die wens kwam uit: deze opgave valt onder het onderwerp ‘functievergelijkingen’ en dat is juist mijn lievelingsonderwerp. Daarom kostte het mij niet al te veel moeite deze opgave op te lossen.
De eerste twee gevallen die ik hierboven heb behandeld, had ik op de IMO ook al snel, maar bewijzen dat er bij het laatste geval geen mogelijke functies waren, kostte me toch iets meer moeite. Uiteindelijk had ik de opgave in ongeveer een half uur à drie kwartier opgelost, waarna ik mijn netversie ging schrijven.
In een netversie laat men alle overbodige dingen uit de kladversie weg en alle stappen die je op je kladversie misschien niet voldoende hebt toegelicht, licht men hierin nog toe, zodat het voor de nakijkers duidelijk is hoe je aan een bepaalde bevinding bent gekomen. Zelf heb ik met plezier aan deze en de andere 5 opgaven gewerkt en ik hoop de komende IMO ook nog mee te maken!

Noot van de redactie

[1] Om druktechnische redenen is de notatie $\lfloor z \rfloor$ zoals die oorspronkelijk voorkomt in de IMO-opgave, in het artikel vervangen door $[z]$.

Info

Website 2011: *www.imo2011.nl*

Over de auteur

Daniël Kroes zit in klas 6-vwo van het Minkema College in Woerden. In 2010 nam hij deel aan de IMO in Kazachstan en behaalde daar een eervolle vermelding. Momenteel behoort hij bij de laatste 12 scholieren die kans maken op een plek in het team voor IMO2011.
Hij is van plan wis- en natuurkunde te gaan studeren aan de Universiteit Utrecht.