Afgelopen zomer vond in Argentinië de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Teamlid Michelle Sweering (15) behaalde daar een eervolle vermelding, die ze verdiende wegens het volledig correct oplossen van opgave 2, een van de zes opgaven. In dit artikel bespreekt ze deze opgave en de manier waarop ze deze had opgelost.

■ door Michelle Sweering

JE ONGELIJK BEWIJZEN

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Om een opgave tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) op te lossen, moet je natuurlijk eerst weten welke stelling je moet gebruiken, maar daarna moet je ook nog een heleboel puzzelen en proberen. Zo is dit artikel ook opgebouwd. Eerst een stukje informatie over het rekenkundig gemiddelde, het meetkundig gemiddelde en het verband tussen deze twee. Daarna een stukje over hoe je met deze kennis een opgave op de IMO oplost.

REKENKUNDIG EN MEETKUNDIG GEMIDDELDE Iedereen kent het gemiddelde van een serie getallen wel: tel alle getallen bij elkaar op en deel het resultaat door het aantal getallen. Dit gemiddelde heet het *rekenkundig* gemiddelde. Van de getallen 27, 12 en 18 is het gemiddelde dus $(27 + 12 + 18)/3 = 57/3 = 19$.

Daarnaast bestaat er ook nog een ander gemiddelde: het *meetkundig* gemiddelde. Als je van k getallen het meetkundig gemiddelde neemt, is dat de k^{de}-machtswortel van het *product* van alle getallen. In het geval van 27, 12 en 18 is dat dus $\sqrt[3]{27 \cdot 12 \cdot 18} = \sqrt[3]{5832} = 18$.

Je ziet dat de twee gemiddeldes niet hetzelfde zijn: in het voorbeeld is het rekenkundig gemiddelde groter dan het meetkundig gemiddelde. Zou het in een ander geval juist kleiner kunnen zijn? Het antwoord hierop blijkt 'nee' te zijn. Althans, zolang je geen negatieve getallen invult. (Zie het kader op pagina 22 voor een bewijs in het geval van twee getallen.) Kortom, voor alle niet-negatieve reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ geldt dat

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k}. \qquad (*)$$

Kunnen de twee gemiddeldes ook precies gelijk zijn, met andere woorden: zijn er gevallen waarbij we het $\geq$ mogen vervangen door een $=$-teken? Het antwoord is ja, maar alleen in het bijzondere geval dat alle getallen waarvan het gemiddelde wordt genomen, gelijk zijn: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

Tijdens de IMO in Argentinië kwam $(*)$, bekend als de *ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde*, mij goed van pas. Ik heb er opgave 2 mee kunnen oplossen en ik zal nu laten zien hoe ik dat gedaan heb.

Opgave 2 (IMO 2012). Zij $n \geq 3$ een geheel getal en laat $a_2, a_3, \ldots, a_n$ positieve reële getallen zijn zodanig dat $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Bewijs dat

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n.$$

We willen de opgave oplossen met de ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde. Het is daarom handig om die ongelijkheid zó om te schrijven, dat die op de opgave gaat lijken. In de opgave staan geen breuken. Dus waarschijnlijk is het een goed idee om beide kanten van $(*)$ met k te vermenigvuldigen:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k \cdot \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k}.$$

In de opgave staan ook geen wortels. Dus het zal ook wel slim zijn om beide kanten tot de k^{de} macht te verheffen:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^k \geq k^k \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k.$$

De linkerkant lijkt nu al erg op $(1 + a_k)^k$. Het lijkt dus een goed idee om van de te bewijzen ongelijkheid elke factor links apart te behandelen en

dan hoeven we alleen nog de x_i zo te kiezen dat $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1 + a_k$. Dit kan op een heleboel verschillende manieren. Op de IMO probeerde ik eerst $x_1 = 1$ en $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = \frac{a_k}{k-1}$. Dat levert de volgende ongelijkheid op:

$$\left(1 + \frac{a_k}{k-1} + \cdots + \frac{a_k}{k-1}\right)^k \geq k^k \cdot 1 \cdot \frac{a_k}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{k-1},$$

ofwel

$$(1 + a_k)^k \geq k^k \cdot 1 \cdot \left(\frac{a_k}{k-1}\right)^{k-1} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k^{k-1}.$$

Door dit voor alle factoren te doen, vinden we

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geq$$
$$\frac{2^2}{(2-1)^{2-1}} \cdot a_2^{2-1} \cdot \frac{3^3}{(3-1)^{3-1}} \cdot a_3^{3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_n^{n-1} =$$
$$\frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_2^1 \cdot a_3^2 \cdot \ldots \cdot a_n^{n-1}.$$

Dit komt niet goed uit, want de a_k's hebben allemaal een andere macht en het enige wat we over de a_k's weten, is dat $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Elke a_k heeft macht $k - 1$, omdat er $k - 1$ van de x_i's gelijk zijn aan $\frac{a_k}{k-1}$.

OPNIEUW PROBEREN Na heel veel mislukte ideeën bedacht ik het volgende: als ik in het rekenkundig-meetkundig gemiddelde maar één keer a_k invul en $k - 1$ keer $\frac{1}{k-1}$ in plaats van één keer 1 en $k - 1$ keer $\frac{a_k}{k-1}$, dan heeft elke a_k dezelfde macht, namelijk 1.

Ik koos dus de getallen $x_1 = a_k$ en $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = \frac{1}{k-1}$ en dat bleek een goede zet. We krijgen:

$$\left(a_k + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right)^k \geq k^k \cdot a_k \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{k-1},$$

ofwel

$$(1 + a_k)^k \geq k^k \cdot a_k \cdot \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k.$$

Dus

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geq$$
$$\frac{2^2}{(2-1)^{2-1}} \cdot a_2 \cdot \frac{3^3}{(3-1)^{3-1}} \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_n =$$
$$\frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

We weten dat $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$, want dat is gegeven. Dus

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}.$$

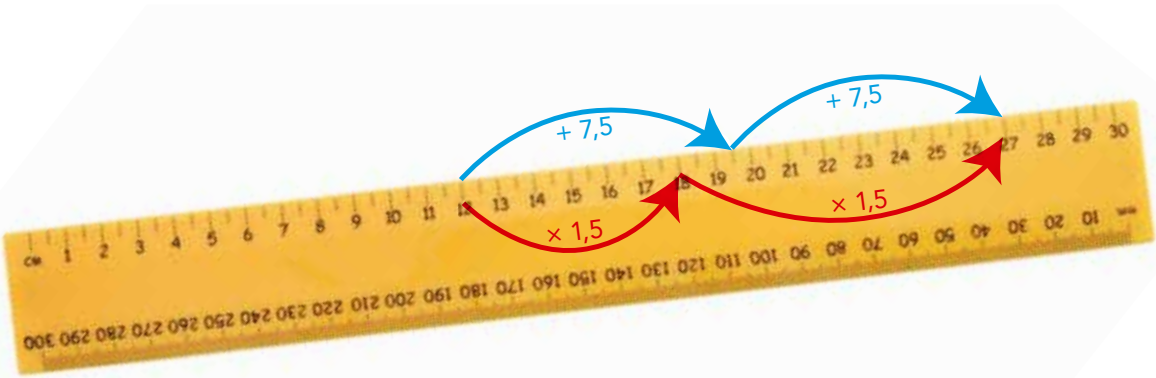
Omdat elke teller de noemer is van de vólgende breuk, vallen deze getallen weg, behalve de teller van de laatste breuk en de noemer van de eerste breuk. We houden over:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geq \frac{n^n}{1^1} = n^n.$$

We zijn er nu bijna: we hoeven alleen te bewijzen dat hier nooit = kan staan, zodat het altijd > is.

We kijken hiervoor naar de afzonderlijke ongelijkheden

$$(1 + a_k)^k \geq a_k \cdot \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}.$$



Het rekenkundig gemiddelde van 12 en 27 is 19,5; op deze liniaal is dat met blauwe pijlen geïllustreerd. Het meetkundig gemiddelde van 12 en 27 is 18; de rode pijlen illustreren dit feit.

Als voor ook maar een van de k's geldt dat hier eigenlijk een >-teken staat, dan geldt

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n >$$
$$a_2\cdot\frac{2^2}{1^1}\cdot a_3\cdot\frac{3^3}{2^2}\cdot\ldots\cdot a_n\cdot\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$$

en daardoor

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n > n^n,$$

dus dan zijn we klaar. Zo niet, dan moet er dus voor elke k gelden dat

$$(1+a_k)^k = a_k\cdot\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}.$$

Dus bij het toepassen van de ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde moest er ook al = staan. Dat kan alleen als alle getallen waarvan het gemiddelde genomen is, gelijk zijn aan elkaar (zie weer het kader). Dus $a_k = x_1 = x_2 = \frac{1}{k-1}$. En dat voor alle k. Dus geldt ook

$$1 = a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Dus $(n-1)! = 1$. Maar er was gegeven dat $n \geq 3$, waardoor $(n-1)! \geq (3-1)! = 2! = 2$. Dus kan $(n-1)!$ helemaal niet 1 zijn. We concluderen dat het onmogelijk is dat er overal een =-teken staat. Met andere woorden: voor minstens een van de k's staat er wél een >-teken. Dus

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n > n^n.$$

En daarmee is de opgave opgelost. ■

BEWIJS VAN DE ONGELIJKHEID VAN HET REKENKUNDIG-MEETKUNDIG GEMIDDELDE VOOR $k = 2$

We gaan bewijzen dat voor alle niet-negatieve getallen x_1 en x_2 geldt dat

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}.$$

Omdat x_1 en x_2 geen negatieve getallen zijn, kan je daar de wortel van trekken. Een kwadraat is nooit negatief, dus

$$\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0. \qquad (**)$$

Hiermee kan de ongelijkheid van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde voor $k = 2$ worden bewezen. Uitwerken van het 'merkwaardige product' in (**) levert:

$$x_1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2 \geq 0,$$

dus

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

en dus

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1x_2}.$$

Als x_1 en x_2 gelijk zijn, dan staat hier links en rechts hetzelfde, dus dan mag het ≥-teken worden vervangen door een =-teken. Is dat de enige manier om een =-teken te krijgen? Ja, 0^2 is immers het enige kwadraat dat gelijk is aan 0. Dus $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2$ is alleen 0 als $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} = 0$ en dat is precies dan als $x_1 = x_2$.

Een bewijs van het rekenkundig-meetkundig gemiddelde voor álle k kun je vinden in het trainingsmateriaal van de Wiskunde Olympiade: www.wiskundeolympiade.nl/training/trainingsdag1/ongelijkheden1.pdf.