IMO-selectietoets II

vrijdag 2 juni 2017

Uitwerkingen

Opgave 1. Laat a, b en c positieve gehele getallen zijn, allemaal verschillend, en veronderstel dat $p = ab + bc + ca$ een priemgetal is.

a) Bewijs dat a^2, b^2 en c^2 verschillende resten geven bij deling door p.

b) Bewijs dat a^3, b^3 en c^3 verschillende resten geven bij deling door p.

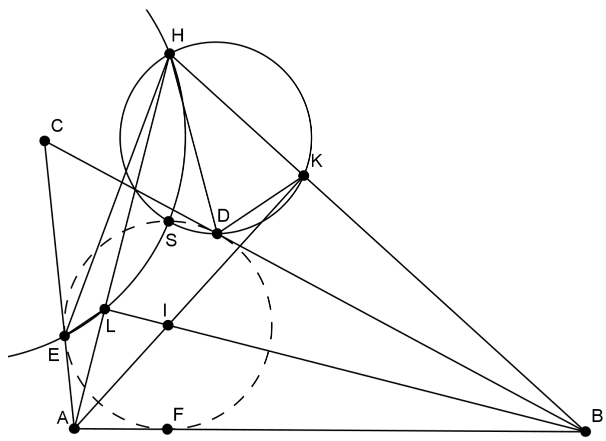
Oplossing.

a) We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat twee van a^2, b^2 en c^2 dezelfde rest geven bij deling door p, zeg dat $a^2 \equiv b^2 \mod p$. Dan geldt $p \mid a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, dus $p \mid a-b$ of $p \mid a+b$. In het laatste geval geldt $p \leq a+b \leq c(a+b) < ab+bc+ca = p$, tegenspraak. In het eerste geval geldt vanwege $a \neq b$ dat $p \leq |a-b| \leq a+b < p$, tegenspraak.

b) We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat twee van a^3, b^3 en c^3 dezelfde rest geven bij deling door p, zeg dat $a^3 \equiv b^3 \mod p$. Dan geldt $p \mid a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, dus $p \mid a-b$ of $p \mid a^2+ab+b^2$. Het eerste geval geeft net als bij (a) een tegenspraak. We bekijken het andere geval: $p \mid a^2+ab+b^2$. Daaruit volgt dat $p \mid a^2+ab+b^2+(ab+bc+ca) = (a+b)(a+b+c)$ en dus $p \mid a+b$ of $p \mid a+b+c$. Er geldt echter $a+b < a+b+c < ab+bc+ca$ omdat a, b en c niet allemaal gelijk kunnen zijn aan 1. Dus p is geen deler van $a+b$ of $a+b+c$, tegenspraak.

$\square$

Opgave 2. De ingeschreven cirkel van een niet-gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ heeft middelpunt I en raakt aan BC en CA in respectievelijk D en E. Zij H het hoogtepunt van $\triangle ABI$, zij K het snijpunt van AI en BH en zij L het snijpunt van BI en AH. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van $\triangle DKH$ en $\triangle ELH$ snijden op de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.



Oplossing I. We bekijken de configuratie in de figuur; andere configuraties gaan analoog. Er geldt $\angle IDB = 90° = \angle IKB$, dus $BKDI$ is een koordenvierhoek. Verder is $\angle ALB = 90° = \angle AKB$, dus ook $BKLA$ is een koordenvierhoek. Dus

$$\angle BKD = 180° - \angle BID = 180° - (90° - \tfrac{1}{2}\angle ABC) = 180° - \angle BAL = \angle BKL.$$

Hieruit volgt dat K, D en L op een lijn liggen. Analoog liggen ook K, E en L op een lijn en dat is dezelfde lijn, dus D ligt hier ook op.
Zij S het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van $\triangle DKH$ en $\triangle ELH$. Dan geldt

$$\begin{aligned}\angle DSE = 360° - \angle DSH - \angle HSE = \angle DKH + 180° - \angle HLE &= \angle LKH + \angle HLK \\ &= 180° - \angle KHL.\end{aligned}$$

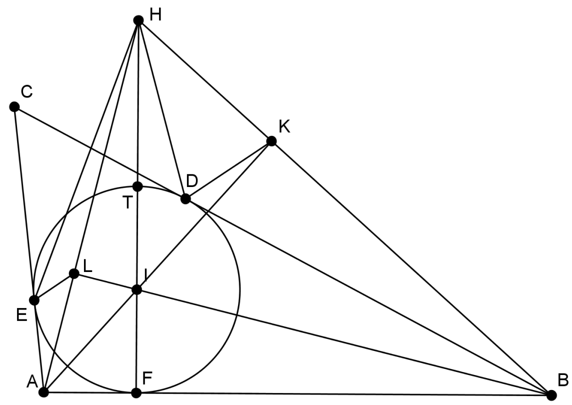
Omdat ook $HLIK$ een koordenvierhoek is (wegens twee rechte hoeken) geldt

$$180° - \angle KHL = \angle KIL = \angle AIB = 180° - \angle IBA - \angle IAB = 180° - \tfrac{1}{2}\angle CBA - \tfrac{1}{2}\angle CAB.$$

Dus $\angle DSE = 180° - \frac{1}{2}\angle CBA - \frac{1}{2}\angle CAB$. Noem nu F het raakpunt van de ingeschreven cirkel aan zijde AB, dan zijn $AFIE$ en $BFID$ ook koordenvierhoeken (allebei wegens twee rechte hoeken). Dus geldt

$$\angle DFE = \angle DFI + \angle IFE = \angle DBI + \angle IAE = \tfrac{1}{2}\angle CBA + \tfrac{1}{2}\angle CAB.$$

We concluderen dat $\angle DFE + \angle DSE = 180°$, waaruit volgt dat S op de omgeschreven cirkel van $\triangle DEF$ ligt en dat is precies de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. $\square$



Oplossing II. We bewijzen net als in oplossing I dat K, D, E en L op een lijn liggen. Noem nu $T \neq F$ het snijpunt van HI en de ingeschreven cirkel. Als $T = H$, dan is er niets te bewijzen. Neem nu aan $T \neq H$. Dan is het voldoende te laten zien dat $KDTH$ en $ELTH$ koordenvierhoeken zijn. Wegens koordenvierhoeken $ETDF$ (ingeschreven cirkel) en $EIFA$ (twee rechte hoeken) geldt: $\angle EDT = \angle EFT = \angle EFI = \angle EAI = \frac{1}{2}\angle CAB$. En vanwege koordenvierhoek $HKFA$ (twee rechte hoeken) geldt verder $\angle KHT = \angle KHF = \angle KAF = \frac{1}{2}\angle CAB$. Dus $\angle KHT = \angle EDT = 180° - \angle KDT$ aangezien K, D en E op een lijn liggen. We concluderen dat $KDTH$ een koordenvierhoek is. De andere koordenvierhoek gaat analoog. $\square$

Opgave 3. Zij $k > 2$ een geheel getal. Een positief geheel getal ℓ noemen we *k-pabel* als we de getallen 1, 3, 5, ..., $2k-1$ kunnen opdelen in twee verzamelingen A en B zodat de som van de elementen van A precies ℓ keer zo groot is als de som van de elementen van B. Bewijs dat het kleinste k-pabele getal relatief priem is met k.

Oplossing. We gaan bewijzen dat als p de kleinste priemdeler van k is, dat dan $p-1$ het kleinste k-pabele getal is. Hieruit volgt het gevraagde, want er geldt dan $\text{ggd}(p-1, k) = 1$. Er geldt $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$. Als ℓ een k-pabel getal is en s is de bijbehorende som van de elementen uit B, dan is de som van de elementen uit A gelijk aan ℓs, dus is de totale som $(\ell + 1)s$ en dat moet gelijk zijn aan k^2. Dus $\ell + 1 \mid k^2$. Omdat $\ell + 1 \geq 2$ geldt nu $\ell + 1 \geq p$, waarbij p de kleinste priemdeler van k is. Dus $\ell \geq p - 1$. We gaan nu bewijzen dat $\ell = p - 1$ een k-pabel getal is, waaruit dan onmiddellijk volgt dat het het kleinste k-pabele getal is. En daarmee zijn we klaar, want $\text{ggd}(k, p-1) = 1$ omdat er geen priemdelers kleiner dan p in k zitten.

Stel eerst dat k even is, zodat $p = 2$. Dan moeten we dus bewijzen dat we de verzameling $\{1, 3, \ldots, 2k-1\}$ kunnen opdelen in twee verzamelingen met gelijke som van de elementen. Dit bewijzen we met inductie naar k. Voor $k = 4$ en $k = 6$ hebben we respectievelijk $\{1, 7\}, \{3, 5\}$ en $\{1, 3, 5, 9\}$, $\{7, 11\}$. Als we de verzameling $\{1, 3, \ldots, 2k-1\}$ zo kunnen opdelen, kan dat ook voor de verzameling $\{1, 3, \ldots, 2(k+4)-1\}$ door van de nieuwe elementen $\{2k+1, 2k+3, 2k+5, 2k+7\}$ de elementen $2k+1$ en $2k+7$ in de ene verzameling te stoppen en de elementen $2k+3$ en $2k+5$ in de andere. Dat voltooit de inductie.

Stel nu dat k oneven is. Schrijf $k = pm$. Dan is het voldoende dat we een deelverzameling B van $\{1, 3, \ldots, 2k-1\}$ kunnen vinden waarvan de som van de elementen gelijk is aan pm^2, want dan is de som van de elementen in de verzameling $A = \{1, 3, \ldots, 2k-1\} \setminus B$ gelijk aan $k^2 - pm^2 = p^2m^2 - pm^2 = (p-1)pm^2$ en dus precies $p-1$ keer zo groot als de som van de elementen in B. Bekijk de verzameling $B = \{p, 3p, \ldots, (2m-1)p\} \subset \{1, 3, \ldots, 2k-1\}$. Dan is de som van de elementen in B gelijk aan

$$p + 3p + \cdots + (2m-1)p = p(1 + 3 + \cdots + (2m-1)) = pm^2,$$

precies wat de bedoeling was. $\square$

Opgave 4. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat

$$(y+1)f(x) + f\big(xf(y) + f(x+y)\big) = y$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing I. Invullen van $x = 0$ geeft $(y+1)f(0) + f(f(y)) = y$, dus $f(f(y)) = y \cdot (1 - f(0)) - f(0)$. Als $f(0) \neq 1$, is de rechterkant een bijectieve functie in y en de linkerkant dus ook. Daarmee is in dit geval f bijectief.
We gaan nu laten zien dat in het geval $f(0) = 1$ ook geldt dat f bijectief is. Dus stel $f(0) = 1$. Dan krijgen we $f(f(y)) = -1$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Invullen van $y = 0$ geeft $f(x) + f(x + f(x)) = 0$, dus $f(x + f(x)) = -f(x)$. Vul vervolgens $x = f(z)$ en $y = z$ in en vervang $f(f(z))$ door -1:

$$(z+1) \cdot -1 + f\big(f(z)f(z) + f(z + f(z))\big) = z,$$

dus, als we ook nog gebruiken dat $f(z + f(z)) = -f(z)$,

$$f\big(f(z)^2 - f(z)\big) = 2z + 1.$$

Hieruit volgt direct dat f surjectief is. Als er a en b zijn met $f(a) = f(b)$, dan geeft $z = a$ en daarna $z = b$ invullen in deze laatste vergelijking links twee keer hetzelfde, terwijl er rechts eerst $2a + 1$ en daarna $2b + 1$ staat. Dus $a = b$, waaruit volgt dat f injectief is. We zien dat f ook in dit geval bijectief is.
We kunnen dus vanaf nu aannemen dat f bijectief is, waarbij we de aanname $f(0) = 1$ weer laten vallen. We weten $f(f(y)) = y \cdot (1 - f(0)) - f(0)$ en dus vinden we met $y = -1$ dat $f(f(-1)) = -1$. Invullen van $y = -1$ in de oorspronkelijke vergelijking geeft

$$f\big(xf(-1) + f(x-1)\big) = -1 = f(f(-1)).$$

Omdat f injectief is, volgt hieruit dat $xf(-1) + f(x-1) = f(-1)$, dus $f(x-1) = f(-1) \cdot (1 - x)$. Als we nu $x = z + 1$ nemen, zien we dat $f(z) = -f(-1)z$ voor alle $z \in \mathbb{R}$. Dus de functie is van de vorm $f(x) = cx$ voor $x \in \mathbb{R}$, waarbij $c \in \mathbb{R}$ een constante is. We controleren deze functie. Er geldt

$$(y+1)f(x) + f\big(xf(y) + f(x+y)\big) = (y+1)cx + c(xcy + cx + cy) = cxy + cx + c^2xy + c^2x + c^2y.$$

Dit moet gelijk zijn aan y voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Met $y = 0$ en $x = 1$ staat er $c + c^2 = 0$, dus $c = 0$ of $c = -1$. Met $x = 0$ en $y = 1$ staat er $c^2 = 1$, dus $c = 1$ of $c = -1$. We concluderen dat $c = -1$ en dan zien we dat deze functie inderdaad voldoet. Dus de enige oplossing is $f(x) = -x$ voor $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Oplossing II. We geven een alternatief bewijs voor het geval $f(0) = 1$. Net als in de eerste oplossing vinden we $f(f(y)) = -1$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Vul nu $x = f(0) = 1$ in:

$$(y+1)f(f(0)) + f\big(f(y) + f(1+y)\big) = y.$$

Er geldt $f(f(0)) = -1$, dus

$$f\big(f(y) + f(1+y)\big) = 2y + 1.$$

Als we nu links en rechts f toepassen, vinden we

$$f\Bigg(f\big(f(y) + f(1+y)\big)\Bigg) = f(2y+1).$$

Links staat hier gewoon -1, dus f is overal gelijk aan -1, maar dat is een tegenspraak met $f(0) = 1$. In dit geval zijn er dus geen oplossingen. $\square$