IMO-selectietoets II

vrijdag 3 juni 2016

Uitwerkingen

Opgave 1. Bewijs dat voor alle positieve reële getallen a, b, c geldt:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a + b + c).$$

Oplossing. We kunnen $\sqrt[3]{abc}$ schrijven als $\sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c}$. Toepassen van de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde op de (positieve) termen $\frac{a}{4}$, b en $4c$ geeft dan

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c} \leq \frac{\frac{a}{4} + b + 4c}{3} = \frac{a}{12} + \frac{b}{3} + \frac{4c}{3}.$$

Daarnaast passen we rekenkundig-meetkundig toe op $\frac{a}{2}$ en $2b$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2b} \leq \frac{\frac{a}{2} + 2b}{2} = \frac{a}{4} + b.$$

Deze twee ongelijkheden tellen we bij elkaar op en we tellen er ook nog a bij op:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{a}{4} + b + \frac{a}{12} + \frac{b}{3} + \frac{4c}{3} = \frac{4}{3}(a + b + c).$$

$\square$

Opgave 2. Bepaal alle paren (a, b) van gehele getallen met de volgende eigenschap: er is een gehele $d \geq 2$ zodat $a^n + b^n + 1$ deelbaar is door d voor alle positieve gehele getallen n.

Oplossing. Bekijk een paar (a, b) dat voldoet, met bijbehorende d. Zij p een priemdeler van d (die bestaat omdat $d \geq 2$). Omdat $d \mid a^n + b^n + 1$ voor alle n, geldt ook $p \mid a^n + b^n + 1$ voor alle n. Bekijk nu $n = p - 1$. Dan geldt $a^n \equiv 0 \mod p$ als $p \mid a$ en $a^n \equiv 1 \mod p$ als $p \nmid a$, wegens de kleine stelling van Fermat. Hetzelfde geldt voor b. Dus $a^n + b^n + 1$ kan modulo p de waarden 1, 2 en 3 aannemen. Omdat het anderzijds 0 modulo p moet zijn, zien we dat $p = 2$ of $p = 3$. We onderscheiden dus twee gevallen.

Stel dat $p = 3$. Dan moet dus $3 \nmid a$, $3 \nmid b$. Het geval $n = 1$ geeft verder dat $3 \mid a + b + 1$, dus $a + b \equiv 2 \mod 3$. Die twee eisen samen betekenen dat $a \equiv b \equiv 1 \mod 3$. In dit geval geldt voor alle positieve gehele n dat $a^n + b^n + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \mod 3$, dus elk zo'n tweetal voldoet, met $d = 3$.

Stel nu dat $p = 2$. Dan moet 2 een deler zijn van precies één van a en b. In dat geval geldt voor alle positieve gehele n dat $a^n + b^n + 1 \equiv 0 + 1 + 1 \equiv 0 \mod 2$, dus elk zo'n tweetal voldoet, met $d = 2$.

We concluderen dat dit de paren zijn die voldoen: (a, b) met $a \equiv b \equiv 1 \mod 3$, (a, b) met $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \mod 2$, en (a, b) met $a \equiv 0$, $b \equiv 1 \mod 2$. $\square$

Opgave 3. Zij $\triangle ABC$ een gelijkbenige driehoek met $|AB| = |AC|$. Laat D, E en F punten zijn op de respectievelijke lijnstukken BC, CA en AB zodat $|BF| = |BE|$ en zodat ED de binnenbissectrice van $\angle BEC$ is.
Bewijs dat $|BD| = |EF|$ dan en slechts dan als $|AF| = |EC|$.

Oplossing I. Uit het gegeven en de bissectricestelling volgt dat

$$\frac{|BF|}{|BD|} = \frac{|BE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|CD|}.$$

Vanwege de gelijkbenigheid van $\triangle ABC$ geldt verder $\angle FBD = \angle ECD$, wat samen geeft dat $\triangle BFD \sim \triangle CED$. Hieruit volgt dat $\angle BFD = \angle CED = \angle BED$, dus $BDEF$ is een koordenvierhoek. Met de stelling van Julian geldt dus $|BD| = |EF|$ dan en slechts dan als $DE \parallel BF$. Er geldt $|AF| = |EC|$ dan en slechts dan als $|BF| = |AE|$ (aangezien $|AB| = |AC|$), oftewel dan en slechts dan als $|EA| = |EB|$, en dat geldt dan en slechts dan als $\angle BAE = \angle ABE$. Aangezien $2\angle BED = \angle BEC = \angle BAE + \angle ABE$ vanwege de buitenhoekstelling, is $\angle BAE = \angle ABE$ equivalent met $\angle BED = \angle ABE$ en dat is weer equivalent met $DE \parallel BF$. Kortom, $|BD| = |EF|$ dan en slechts dan als $DE \parallel BF$ en dat geldt dan en slechts dan als $|AF| = |EC|$. $\square$

Oplossing II. Stel eerst $|BD| = |EF|$. Vanwege de buitenhoekstelling en het gegeven dat $|BF| = |BE|$ geldt $\angle AEF = \angle BFE - \angle FAE = \angle BEF - \angle FAE$. Dus

$$180^\circ - 2\angle BED = \angle AEF + \angle BEF = 2\angle BEF - \angle FAE = 2\angle BEF - (180^\circ - 2\angle ABC).$$

Hieruit volgt

$$180^\circ = \angle BED + \angle BEF + \angle ABC = \angle DEF + \angle FBD,$$

dus $BDEF$ is een koordenvierhoek. Vanwege $|BD| = |EF|$ krijgen we met de stelling van Julian dat $BF \parallel DE$. Dus

$$\angle BFD = \angle BED = \angle DEC = \angle BAC,$$

wat betekent dat $FD \parallel AC$. Dus $FAED$ is een parallellogram. Verder zijn driehoeken BFD en BAC nu gelijkvormig wegens gelijke hoeken bij A en F, dus BFD is ook gelijkbenig. Dus geldt $|AE| = |FD| = |FB|$. Vanwege $|AB| = |AC|$ volgt daaruit $|EC| = |AF|$. Stel nu andersom dat $|EC| = |AF|$. Dat betekent $|AE| = |BF| = |BE|$, dus $\triangle AEB$ is gelijkbenig. Hieruit volgt $\angle BAC = \angle ABE$, dus hebben de gelijkbenige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle BEF$ dezelfde tophoek. Dat maakt dat ze gelijkvormig zijn. Noem de tophoek van deze driehoeken even α en de basishoek β. Dan is $\angle DBE = \angle DBA - \angle EBF = \beta - \alpha = \angle AEF$ vanwege de buitenhoekstelling in $\triangle AFE$. Verder is $\angle BED = \frac{1}{2}\angle BEC = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$ vanwege de buitenhoekstelling in $\triangle AEB$. Driehoeken $\triangle AFE$ en $\triangle EDB$ hebben dus twee paren gelijke hoeken. Daarnaast is $|AE| = |EB|$, dus deze driehoeken zijn congruent. Daaruit volgt $|DB| = |EF|$. $\square$

Opgave 4. Bepaal het aantal verzamelingen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{1000}\}$ van positieve gehele getallen met $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1000} \leq 2014$, waarvoor geldt dat de verzameling

$$S = \{a_i + a_j \mid 1 \leq i, j \leq 1000 \text{ en } i + j \in A\}$$

een deelverzameling is van A.

Oplossing. We bewijzen dat er 2^{14} zulke verzamelingen zijn. We bewijzen in het bijzonder dat de verzamelingen A die voldoen van de vorm $B \cup C$ zijn, met C een deelverzameling van $\{2001, \ldots, 2014\}$ en $B = \{1, 2, \ldots, 1000 - |C|\}$. Noem verzamelingen van die vorm "leuk". Omdat er 2^{14} deelverzamelingen van $\{2001, \ldots, 2014\}$ zijn, zijn er 2^{14} leuke verzamelingen.
We laten eerst zien dat iedere leuke verzameling A voldoet. Stel dat $i, j \leq 1000$ met $i + j \in A$. Dan is $i + j \leq 2000$, dus $i + j \in B$. Er bestaat dan dus een k met $k \leq 1000 - |C|$ zodat $i + j = a_k (= k)$. Omdat $a_k \leq 1000 - |C|$ geldt ook $i, j \leq 1000 - |C|$, dus $a_i = i$ en $a_j = j$. Dat betekent $a_i + a_j = i + j = a_k$ en dat is een element van A. Dus elk element van S is een element van A, waaruit volgt dat A voldoet.
We laten nu zien dat iedere verzameling A die voldoet, leuk is. Stel allereerst dat er een k met $1 \leq k \leq 1000$ bestaat zodat $a_k \in \{1001, \ldots, 2000\}$. Dan is $a_k = 1000 + i$ voor zekere i met $i \leq 1000$, dus $a_{1000} + a_i$ is een element van S en moet daarom ook een element van A zijn. Er geldt echter $a_{1000} + a_i > a_{1000}$, tegenspraak. Dus zo'n a_k kan niet voorkomen. Dit betekent dat A te schrijven is als de disjuncte vereniging $B \cup C$, met $C \subseteq \{2001, \ldots, 2014\}$ en $B \subseteq \{1, 2, \ldots, 1000\}$. Zij b het aantal elementen van B. Dan is $b \geq 986$, want C heeft hoogstens 14 elementen. Om te bewijzen dat A leuk is, moeten we bewijzen dat $B = \{1, 2, \ldots, b\}$. Hiertoe is het voldoende om te bewijzen dat a_b, het grootste element van B, gelijk is aan b. Stel daarom uit het ongerijmde dat $a_b > b$. Voor i met $i = a_b - b$ geldt dan $b + i = a_b \leq 1000$, dus $i \leq 1000 - b \leq 14 < b$. Daarom is $a_i \leq 1000$ en dus $a_b + a_i \leq 2000$. Omdat $i + b = a_b \in A$, geldt $a_b + a_i \in S \subset A$, maar dan is $a_b + a_i$ een groter element van B dan a_b, het maximale element. Tegenspraak. Dus $a_b = b$, waaruit volgt dat $B = \{1, 2, \ldots, b\}$. Dus A is leuk. $\square$