Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 16 september 2016
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. (a) Op een lange stoep staat een rij van 999 getallen geschreven met stoepkrijt. De getallen hoeven niet op volgorde van klein naar groot te staan en ze hoeven niet allemaal verschillend te zijn. Merlijn omcirkelt 500 van de getallen met rood krijt. De rood omcirkelde getallen blijken van links naar rechts precies de getallen $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$ te zijn. Vervolgens omcirkelt Jeroen 500 van de getallen met blauw krijt. De blauw omcirkelde getallen blijken van links naar rechts precies de getallen $500, 499, 498, \ldots, 2, 1$ te zijn.
Bewijs dat het middelste getal in de rij van 999 getallen zowel rood als blauw omcirkeld is.

(b) Merlijn en Jeroen steken de straat over en daar staat ook een rij van 999 getallen op de stoep geschreven. Weer omcirkelt Merlijn 500 van de getallen met rood krijt. Opnieuw blijken de rood omcirkelde getallen van links naar rechts precies de getallen $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$ te zijn. Nu omcirkelt Jeroen ook 500 van de getallen, niet per se dezelfde als Merlijn, met groen krijt. De groen omcirkelde getallen blijken van links naar rechts ook de getallen $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$ te zijn.
Bewijs: er is een getal dat zowel rood als groen omcirkeld is en dat *niet* het middelste getal in de rij van 999 getallen is.

2. Voor een geheel getal $n \geqslant 1$ bekijken we rijtjes van $2n$ getallen die elk gelijk zijn aan 0, -1 of 1. De *somproductwaarde* van zo'n rijtje krijgen we door elk tweetal getallen uit het rijtje met elkaar te vermenigvuldigen en vervolgens alle uitkomsten bij elkaar op te tellen.

Nemen we bijvoorbeeld $n = 2$ en het rijtje $0, 1, 1, -1$, dan vinden we de vermenigvuldigingen $0 \cdot 1$, $0 \cdot 1$, $0 \cdot -1$, $1 \cdot 1$, $1 \cdot -1$, $1 \cdot -1$. Optellen van de zes uitkomsten geeft nu de somproductwaarde van het rijtje: $0 + 0 + 0 + 1 + (-1) + (-1) = -1$. De somproductwaarde van dit rijtje is dus kleiner dan de somproductwaarde van het rijtje $0, 0, 0, 0$, want die is gelijk aan 0.
Bepaal voor elk geheel getal $n \geqslant 1$ de kleinste somproductwaarde die zo'n rijtje van $2n$ getallen kan hebben.
Let op: je moet dus ook bewijzen *dat een kleinere somproductwaarde niet mogelijk is.*

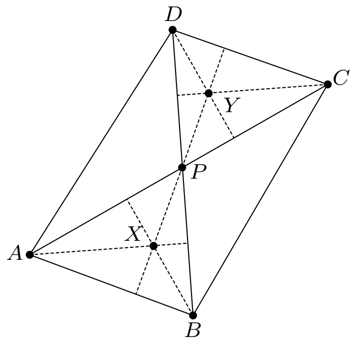
3. Geef alle mogelijke drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen met de volgende eigenschappen:

- $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(a, c) = \text{ggd}(b, c) = 1$;
- a is een deler van $a + b + c$;
- b is een deler van $a + b + c$;
- c is een deler van $a + b + c$.

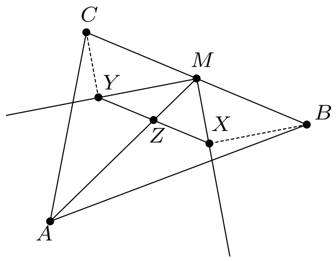
(Voor gegeven getallen x en y wordt met $\text{ggd}(x, y)$ de grootste gemene deler van x en y bedoeld.)

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

4. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager
In een vierhoek $ABCD$ is P het snijpunt van de diagonalen. Punt X is het hoogtepunt van driehoek PAB. (Het hoogtepunt van een driehoek is het snijpunt van de drie hoogtelijnen.) Punt Y is het hoogtepunt van driehoek PCD. Neem aan dat X binnen driehoek PAB ligt en Y binnen driehoek PCD. Veronderstel verder dat P het midden is van lijnstuk XY.
Bewijs dat $ABCD$ een parallellogram is.



4. Versie voor klas 6
In de scherphoekige driehoek ABC is M het midden van zijde BC. Punt X ligt op de bissectrice van $\angle AMB$ zó dat $\angle BXM = 90°$. Punt Y ligt op de bissectrice van $\angle AMC$ zó dat $\angle CYM = 90°$. Lijnstukken AM en XY snijden elkaar in punt Z.
Bewijs dat Z het midden van XY is.



5. Bas heeft elk positief geheel getal een kleur gegeven. Hij had daarbij diverse kleuren tot zijn beschikking. Zijn kleuring voldoet aan de volgende eisen:

- elk oneven getal is blauw gekleurd;
- ieder getal n heeft dezelfde kleur als $4n$;
- ieder getal n heeft dezelfde kleur als minstens een van de getallen $n + 2$ en $n + 4$.

Bewijs dat Bas alle getallen blauw heeft gekleurd.